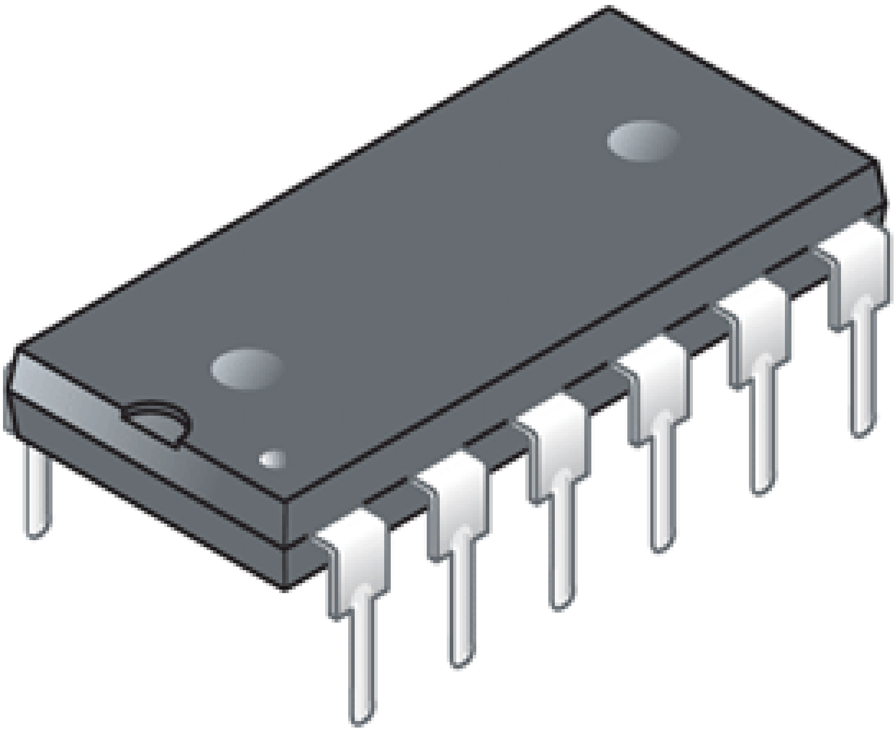
Guía y Problemario De Circuitos Lógicos

- Funciones booleanas.
- Forma canónica.
- Mapas de Karnaugh.
- Decodificadores.
- Sumador, restador y multiplicador.



M en C. Rodolfo Romero Herrera.

Prólogo

Este problemario está diseñado para los alumnos que presentaran examen de admisión para entrar a la maestría en ciencia de la ESCOM. o materias a fines. El material que se expone aquí, está basado exclusivamente en problemas resueltos, omitiendo parte de la teoría fundamental del algebra booleana y circuitería lógica.

Por lo anterior se requiere que el alumno tenga los conocimientos básicos necesarios en la materia. Este problemario está dividido en dos partes.

La primera parte abarca problemas resueltos referentes a los temas siguientes:

- Algebra de Boole.
- Funciones canónicas.
- Mapas de Karnaugh.

La segunda parte contiene problemas resueltos sobre los siguientes temas:

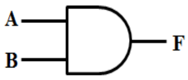
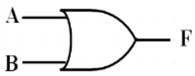
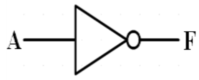
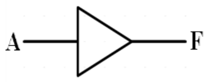
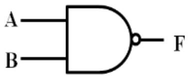
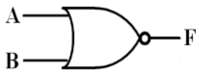
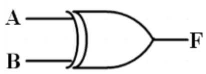
- Sumadores, restadores y multiplicadores.
- Multiplexores.
- Decodificadores.

Este problemario se muestra en forma piloto, para posteriormente poder realizar una primera edición, por lo cual requerimos de sugerencias, comentarios u observaciones de este trabajo.

Atte.

M en C. Rodolfo Romero Herrera.

Compuertas lógicas

Nombre	Símbolo Grafico	Función Algebraica	Tabla de Verdad
Y (AND)		$F = A \cdot B$	A | B | $A \cdot B$ 0 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 0 | 0 1 | 1 | 1
O (OR)		$F = A + B$	A | B | $A + B$ 0 | 0 | 0 0 | 1 | 1 1 | 0 | 1 1 | 1 | 1
Inversor (NOT)		$F = \overline{A}$	A | F 0 | 1 1 | 0
Separador (Buffer)		$F = A$	A | F 0 | 0 1 | 1
NO-Y (NAND)		$F = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	A | B | $\overline{A \cdot B}$ 0 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 0 | 1 1 | 1 | 0
NO-O (NOR)		$F = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	A | B | $\overline{A + B}$ 0 | 0 | 1 0 | 1 | 0 1 | 0 | 0 1 | 1 | 0
O-Exclusiva (OR-Exclusive)		$F = A \not\equiv B$ $= A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$	A | B | $A \oplus B$ 0 | 0 | 0 0 | 1 | 1 1 | 0 | 1 1 | 1 | 0
NO-O Exclusiva (NOR-Exclusive)		$F = \overline{A \not\equiv B}$ $= AB + \overline{AB} = A \odot B$	A | B | $A \odot B$ 0 | 0 | 1 0 | 1 | 0 1 | 0 | 0 1 | 1 | 1

Teoremas Fundamentales del Algebra Booleana

1.

a) $A + 0 = A$
b) $A \cdot 1 = A$

2.

a) $A + \bar{A} = 1$
b) $A \cdot \bar{A} = 0$

3.

a) $A + A = A$
b) $A \cdot A = A$

4.

a) $A + 1 = 1$
b) $A \cdot 0 = 0$

5.

$\left(\bar{\bar{A}}\right) = A$

6.

a) $A + B = B + A$
b) $AB = BA$

(Conmutativo)

7.

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$
b) $A\,(BC) = (AB)\,C$

(Asociativo)

8.

a) $A\,(B + C) = AB + AC$
b) $A + BC = (A + B)\,(A + C)$

(Distributivo)

9.

a) $(\overline{A + B}) = \bar{A}\,\bar{B}$
b) $(\overline{AB}) = \bar{A} + \bar{B}$

(De Morgan)

10.

a) $A + AB = A$
b) $A\,(A + B) = A$

(Absorción)

11.

$(A + B)\,(A + C) = A + BC$

12.

$(A + B)\,(A + \bar{B}) = A$

13.

$A + \overline{A}\,B = A + B$

14.

$AB + A\overline{B}\,C = AB + AC$

15.

$(A + B)\,(A + \overline{B} + C) = (A + B)\,(A + C)$

16.

$AB + \overline{A}\,C + BC = AB + \overline{A}C$

17.

$(A + B)\,(\overline{A} + C)\,(B + C) = (A + B)\,(\overline{A} + C)$

18.

$AB + \overline{A}\,C = (A + C)\,(\overline{A} + B)$

19.

$(A + B)\,(\overline{A} + C) = AC + \overline{A}B$

Formas canónicas de una función booleana

Existen dos formas de expresar una función booleana:

$$\textbf{Formas canónicas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Forma } \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \text{Completa o canónica} \\ \\ \text{Incompleta} \end{array} \right. \\ \\ \\ \text{Forma } \pi \left\{ \begin{array}{l} \text{Completa o canónica} \\ \\ \text{Incompleta} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Forma Canónica $\sum$:

Conocida como una suma de productos canónicos o suma de "***Minitérminos***".

Ejemplo: $F_{\Sigma}\,(A, B, C\,) = \underbrace{\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + ABC}_{\text{Suma de productos}}$

Forma Canónica $\boldsymbol{\pi}$:

Conocida como productos de sumas canónicas o producto de "***Maxitérminos"***

Ejemplo: $F_{\pi}\,(A, B, C\,) = \underbrace{(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C)}_{\text{Producto de sumas}}$

El término completo o canónico se refiere a que todas las variables de una función booleana deben de estar contenidas en este.

Ejemplo:

Considere una función canónica de tres variables F_{Σ} (A, B, C), algunos de sus términos canónicos son:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}, \overline{A}\,\overline{B}\,C, A\,\overline{B}\,\overline{C}$$

Y algunos términos incompletos pueden ser:

$$A\,\overline{B}\,,\,A\,C,\,\overline{B}\,\overline{C}$$

En la siguiente tabla se muestran los minitérminos y maxitérminos para una función booleana de tres variables.

Decimal	**A**	**B**	**C**	**Minitérmino**	**Maxitérmino**
0	0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$	$A +\ B + C$
1	0	0	1	$\overline{A}\ \overline{B}\ C$	$A + B + \overline{C}$
2	0	1	0	$\overline{A}\ B\ \overline{C}$	$A + \overline{B} + C$
3	0	1	1	$\overline{A}\ B\,C$	$A + \overline{B} + \overline{C}$
4	1	0	0	$A\ \overline{B}\ \overline{C}$	$\overline{A} + B + C$
5	1	0	1	$A\,\overline{B}\ C$	$\overline{A} + B + \overline{C}$
6	1	1	0	$A\,B\,\overline{C}$	$\overline{A} + \overline{B} + C$
7	1	1	1	$A\,B\,C$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Nótese que para una función con “n” variables se puede obtener 2^n Minitérminos o Maxitérminos diferentes. Para encontrar los Minitérminos de la función, los ceros lógicos en las variables A, B o C son considerados como una variable negada en el Minitérmino correspondiente. En cambio para encontrar los Maxitérminos de la función, los unos lógicos en las variables A, B o C son considerados como una variable negada en el Maxitérmino correspondiente.

Mapas de Karnaugh

El cuadro de la figura 1 representa un mapa para seis variables distintas, donde los términos pueden ser localizados dentro de los cuadros internos. Lo anterior cumple con las siguientes reglas:

1. La variable testada representa un “cero” por lo tanto le corresponde la localización con segmento de línea:

   0 = “|-----------|”

2. La variable sin testar representa un “uno” por lo tanto le corresponde la localización sin segmento de línea:

   1 = “ ”

Ejemplo:

Localizar la posición que ocupa en el mapa el siguiente término:

$$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E\,F$$

- Primero localizamos en el mapa el área de cuadros que están abajo del segmento de línea A (puesto que en el término, **A** testada representa un “cero” y los “ceros” estarán siempre en cuadros donde haya segmento de línea en su variable correspondiente), el área de cuadros que estén debajo de donde no haya segmento de línea **A**, los desechamos (imaginariamente claro). Como una guía el número de cuadros de esta área es 32 y corresponde a la mitad del mapa.

- Después localizamos el área de cuadros que están abajo del segmento de línea **A** pero que también estén debajo de donde no haya segmento de línea **B** (puesto que en la función, **A** esta testada pero **B** no, ya que **B** representa un “uno” en el término y los “unos” estarán siempre en cuadros donde no haya segmento de línea en su variable correspondiente). El número de cuadros de esta nueva área debe ser ocho. Notemos que el área se irá reduciendo hasta que nos quede un solo cuadro en donde colocaremos lo correspondiente al término propuesto.

- Posteriormente localizamos el área de cuadros donde:

    - Haya segmento de línea **A.**
    - No haya segmento de línea de **B.**
    - No haya segmento de línea de **C** (ocho cuadros de área)
    - Haya segmento de línea **D** (cuatro cuadros de área)
    - No haya segmento de línea de **E** (dos cuadros de área)
    - No haya segmento de línea de **F** (un cuadro de área)

Por lo tanto a la función: $\overline{A}\ B\ C\ \overline{D}\ E\ F$

Le corresponde la posición indicada en la figura con la letra “**τ**”.

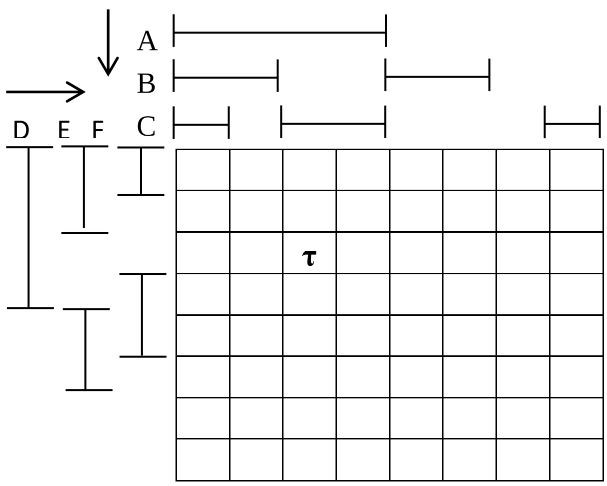


Figura 1. Mapa de Karnaugh para seis variables.

En el caso de que el término tenga menos variables, solo se deberá considerar los cuadros que abarquen dichos términos.

Ejemplo:

Haga un mapa de la siguiente función:

$$\overbrace{\overline{A}\,B\,\overline{C}}^{\tau_0} + \overbrace{A\,B\,C}^{\tau_1}$$

El número de variables distintas es tres por lo tanto:

$2^n = 2^3 = 8$ cuadros. Donde "n" es el número de variables.
Entonces el mapa resultante será el marcado en la figura 1.

En el mapa, las literales son colocadas de la más significativa a la menos significativa como lo indican las flechas en la figura.

1. El mapa resultante es el siguiente:

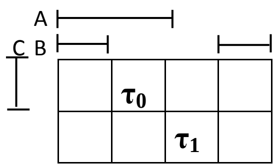


Figura 2. Mapa de Karnaugh de tres variables.

Simplificación de funciones booleanas

El proceso de simplificar una función booleana con ayuda de un mapa de Karnaugh consiste en agrupar celdas adyacentes denominadas implicantes primos.

Grupos de celdas para la simplificación

Solo se permitirá agrupar grupos de "τ" en celdas adyacentes de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Celdas adyacentes son celdas que difieren por una sola variable. Por ejemplo ABCD Y ABC$\overline{D}$. Siempre deben hacer los grupos de "τ" con celdas adyacentes.

2. Las "τ" en celdas adyacentes son agrupadas en grupos de 1, 2, 4, 8, 16…etc. Esto quiere decir que no se pueden hacer grupos de 3, 5, 7 o 9 elementos pues solo es permitido agrupar en potencias de 2.

3. Cada grupo de "τ" puede incluir el mayor número de celdas adyacentes de acuerdo con la regla de agrupar en potencias de 2.

Cuanto mayor sea el grupo de “τ” más variables se eliminarán. Por ejemplo si tenemos un mapa de Karnaugh de 5 variables (A, B, C, D, E) nuestro mapa seria de 2^5=32 cuadros por lo que:

Si el agrupamiento de " τ " es de:	**El número de variables que obtendremos será:**
32 Cuadros	0 Variables
16 Cuadros	1 Variable
8 Cuadros	2 Variables
4 Cuadros	3 Variables
2 Cuadros	4 Variables
1 Cuadros	5 Variables

De lo anterior deducimos que si agrupamos “τ” solamente en grupos de un cuadro obtendríamos la función en su forma canónica.

4. Toda “τ” puede ser incluida en otros grupos, por lo tanto puede haber implicantes primos solapados. Es decir, podemos formar un grupo aun con “τ” que ya habíamos incluido en otros grupos, y de esta manera un grupo más grande para eliminar más variables.

5. Todas las “τ” deberán estar contenidas en algún grupo.

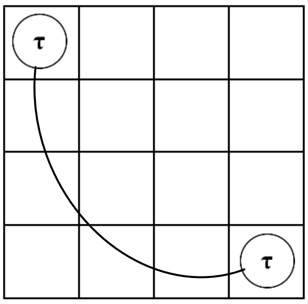
Reglas de simplificación de la expresión

Las siguientes reglas muestran como obtener la expresión simplificada del mapa de Karnaugh.

1. Deben eliminarse las variables contradictorias. Es decir que cambian su valor durante la trayectoria de la agrupación (cambio de “segmento” a ausencia de él).

2. La expresión simplificada quedará en forma de Maxitérminos.

   Algunos grupos incorrectos se muestran a continuación:



Equivocado no son adyacentes.

Ver regla número 1.

τ			
τ			
τ			

Incorrecto
No puede haber grupos de tres términos.

Ver regla número 2.

τ			
τ			
τ	τ	τ	τ
τ			

Incorrecto
Los grupos no son tan extensos cómo es posible.

Ver regla número 3.

	τ		
	τ	τ	τ
τ	τ	τ	
		τ	

Incorrecto
El grupo extra es extenso, pero no sirve para ningún propósito.

Ver regla número 4.

	τ		
	τ	τ	τ
τ	τ	τ	
		τ	

Correcto
Todos los términos encerrados en círculos conforman grupos lo más extenso posible.

Cumple con todas las reglas.

Codificaciones sin importancia en los mapas

Las condiciones cuyo valor es irrelevante en un mapa de Karnaugh se les conoce como “No-Importa” (algunos textos se refieren a ellas por su equivalente en inglés “Don`t -Care”), y se representan por una X. Estas condiciones pueden tomar el valor lógico cero o uno según convenga y de esta manera se pueden extender los grupos. En el siguiente ejemplo se muestra un mapa en donde existen condiciones “No-Importa” y “unos”, con esto se forman dos grupos, un grupo de dos elementos (donde cada elemento es un “uno”) y otro grupo de cuatro elementos con dos “unos” y dos “No-Importa”.

		X	
1	1	X	
		X	
1	1	X	X

Lo anterior nos conviene ya que al formar un grupo de cuatro elementos mezclando “unos” y condiciones “No-Importa”, (en lugar de formar otro grupo de dos elementos con puros “unos”), estamos eliminando variables.

Nota: Siempre es recomendable que cuando se “agrupe” se empiece por el grupo más pequeño (aquel que cuenta con un solo elemento) y se termine por el grupo más grande.

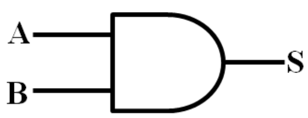
Ejercicios resueltos

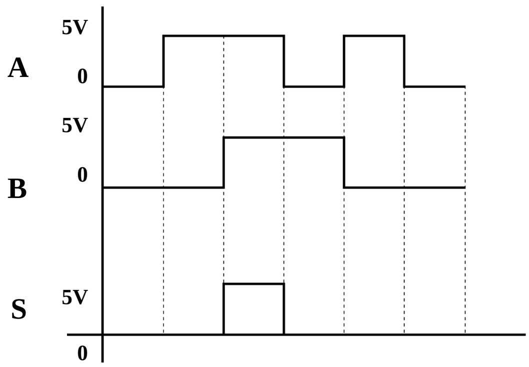
Esta sección muestra una serie de ejemplos que te ayudaran a establecer un método para resolver en un futuro problemas similares.

Problema 1:

Determine el diagrama de tiempo resultante “**S**” de la compuerta **Y** (AND) de acuerdo a sus entradas “**A**” y “**B**” que se muestran en la figura:

Solución:





Problema 2:

Encontrar la forma canónica de la función:

$$F = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}CD$$

Solución:

Recordemos que para encontrar la función canónica, debemos agregar a los términos que componen a la función "F" las variables faltantes. Haremos uso del teorema 2 ya que con él, podemos agregar unos términos sin que se altere nuestra función.

T-2 = Aplicando teorema 2
T-8 = Aplicando teorema 8

$F = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}CD$ **T-2**
$F_{CANONICA} = \overline{B}D(A + \overline{A}) + \overline{A}CD(B + \overline{B})$ **T-8**
$= A\overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}CD$ **T-2**
$= A\overline{B}D(C + \overline{C}) + \overline{A}\,\overline{B}D(C + \overline{C}) + \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}CD$ **T-8**
$= A\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}CD$

Problema 3:

Utilizando algebra de Boole simplifique la expresión:

$$Z = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$$

Solución:

T-8 = Aplicando teorema 8
T-14 = Aplicando teorema 14

$Z = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$ **T-8**
$Z_{REDUCIDA} = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}C$ **T-8**
$= AB + A\overline{B}C$ **T-14**
$= AB + AC$ **T-8**
$= A(B + C)$

Problema 4:

Compruebe la equivalencia de las siguientes funciones:

$$A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B} + \overline{A}C$$

Solución:

T-2 = Aplicando teorema 2
T-8 = Aplicando teorema 8
T-13 = Aplicando teorema 13

$A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$	**T-8**
$A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) + A\overline{B}\overline{C}$	**T-2**
$A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B}\overline{C}$	**T-8**
$A\overline{B}(C + \overline{C}) + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B} = \overline{B} + \overline{A}C$	**T-2**
$A\overline{B} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}$	**T-8**
$\overline{B}(A + \overline{A}) + \overline{A}BC$	**T-2**
$\overline{B} + \overline{A}BC$	**T-13**
$\overline{B} + \overline{A}C$	

Problema 5:

Demostrar el teorema 11 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$(A + B)\ (A + C) = A + BC$$

Solución:

T-3 = Aplicando teorema 3
T-4 = Aplicando teorema 4
T-8 = Aplicando teorema 8

$(A + B)\ (A + C)$	**T-8**
$AA + AC + BA + BC$	**T-3**
$A + AC + BA + BC$	**T-8**
$A\ (1 + C + B) + BC$	**T-4**
$A + BC$	

Problema 6:

Demostrar el teorema 12 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A$$

Solución:

T-2 = Aplicando teorema 2
T-3 = Aplicando teorema 3
T-4 = Aplicando teorema 4
T-8 = Aplicando teorema 8

$(A + B)(A + \bar{B})$	**T-8**
$AA + A\bar{B} + BA + B\bar{B}$	**T-3**
$A + A\bar{B} + BA + B\bar{B}$	**T-2**
$A + A\bar{B} + BA$	**T-8**
$A(1 + \bar{B} + B)$	**T-4**
A	

Problema 7:

Demostrar el teorema 13 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$A + \bar{A}B = A + B$$

Solución:

T-2 = Aplicando teorema 2
T-5 = Aplicando teorema 5
T-8 = Aplicando teorema 8
T-9 = Aplicando teorema 9

$A + \bar{A}B$	**T-9**
$\overline{\bar{A} + \overline{\bar{A}B}}$	**T-9**
$\overline{\bar{A}\,\overline{\overline{(\bar{\bar{A}} + \bar{B})}}}$	**T-5**
$\overline{\bar{A}(A + \bar{B})}$	**T-8**
$\overline{\bar{A}A + \bar{A}\bar{B}}$	**T-2**
$\overline{\bar{A}\bar{B}}$	**T-9**
$\overline{\overline{\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}}}}$	**T-5**
$A + B$	

Problema 8:

Demostrar el teorema 14 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$AB + A\bar{B}C = AB + AC$$

Solución:

T-5 = Aplicando teorema 5
T-8 = Aplicando teorema 8
T-9 = Aplicando teorema 9

$AB + A\bar{B}C$	
$A(B + \bar{B}C)$	**T-8**
$A\left(\overline{\bar{B}\,\overline{\bar{B}C}}\right)$	**T-9**
$A(\overline{\bar{B}\,\overline{\overline{(\bar{\bar{B}} + \bar{C})}})}$	**T-9**
	T-5

$A\overline{(\overline{B}(B+\overline{C}))}$	**T-8**
$A\overline{(\overline{B}\,\overline{C})}$	**T-9**
$A\left(\overline{\overline{\overline{\overline{B}}}+\overline{\overline{\overline{C}}}}\right)$	**T-5**
$A(B+C)$	**T-8**
$AB+AC$	

Problema 9:

Demostrar el teorema 16 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

Solución:

T-2 = Aplicando teorema 2
T-3 = Aplicando teorema 3
T-4 = Aplicando teorema 4
T-5 = Aplicando teorema 5
T-6 = Aplicando teorema 6
T-8 = Aplicando teorema 8
T-9 = Aplicando teorema 9

$AB+\overline{A}C+BC$	**T-9**
$\overline{\overline{AB}\,\overline{\overline{\overline{A}C}}}+BC$	**T-9**
$\overline{\overline{\overline{\overline{AB}\,\overline{\overline{\overline{A}C}}}}\,\overline{BC}}$	**T-5**
$\overline{\overline{ABAC\,BC}}$	**T-9**
$\overline{\left(\overline{\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}}\right)\left(\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}+\overline{C}}\right)\left(\overline{\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}}\right)}$	**T-5**
$\overline{(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})}$	**T-8**
$\overline{\overline{A}A+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}A+\overline{B}\,\overline{C}(\overline{B}+\overline{C})}$	**T-2**
$\overline{\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}A+\overline{B}\,\overline{C}(\overline{B}+\overline{C})}$	**T-8**
$\overline{\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{B}+\overline{B}A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{C}+\overline{B}A\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{C}}$	

Ordenando términos:

$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{C}}$	**T-13**
$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}}$	**T-8**
$\overline{\overline{B}\,\overline{C}\,(\overline{A}+1+A+1)+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}}$	**T-4**
$\overline{\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}}$	**T-2**
$\overline{\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}A}$	**T-8**
$\overline{(A+\overline{C})+(\overline{A}+\overline{B})}$	**T-8**
$\overline{\overline{\overline{\overline{(A+\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+\overline{B})}}}}$	**T-9**
$\overline{(A+\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+\overline{B})}$	**T-5**
$\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{\overline{C}}}+\overline{\overline{\overline{A}}}\,\overline{\overline{\overline{B}}}$	**T-9**
$\overline{A}C+AB$	**T-5**
$AB+\overline{A}C$	**T-6**

Problema 10:

Demostrar el teorema 17 haciendo uso de los teoremas restantes:

$$(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C)$$

T-2 = Aplicando teorema 2
T-5 = Aplicando teorema 5
T-8 = Aplicando teorema 8
T-9 = Aplicando teorema 9

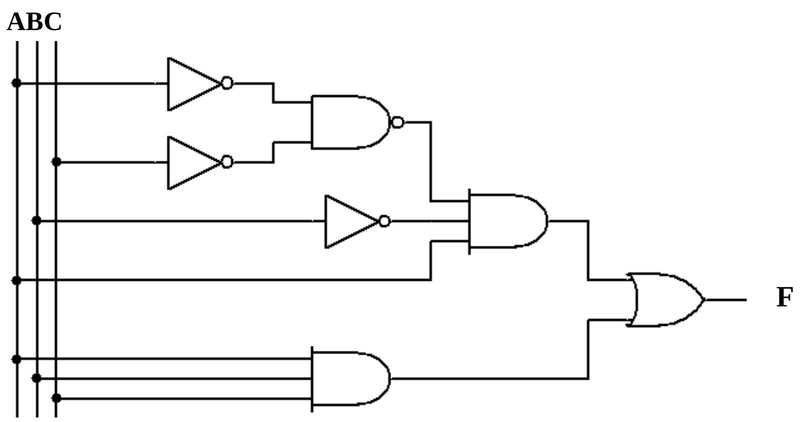
$(A + B)(\overline{A} + C)(B + C)$	**T-8**
$(A\overline{A} + AC + B\overline{A} + BC)(B + C)$	**T-2**
$(AC + B\overline{A} + BC)(B + C)$	**T-8**
$ACB + B\overline{A}B + BCB + ACC + B\overline{A}C + BCC$	**T-3**
$ABC + \overline{A}B + BC + AC + \overline{A}BC + BC$	**T-3**
$ABC + \overline{A}B + BC + AC + \overline{A}BC$	**T-8**
$BC(A + 1 + \overline{A}) + \overline{A}B + AC$	**T-4**
$BC + \overline{A}B + AC$	

Ordenando términos:

$\overline{A}B + AC + BC$	**T-2**
$\overline{A}B + AC + BC + A\overline{A}$	**T-8**
$B(\overline{A} + C) + A(\overline{A} + C)$	**T-8**
$(A + B)(\overline{A} + C)$	

Problema 11:

Simplifique al máximo el circuito de la figura:



Solución:

El primer paso es determinar la función a la cual obedece el circuito. Por observación se tiene que la función es:

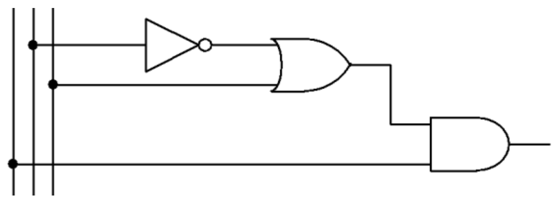
$$F = ABC + A\overline{B}(\overline{\overline{A}\,\overline{C}})$$

Ahora aplicaremos álgebra de Boole para desarrollar la función y simplificar al máximo.

T-1 = Aplicando teorema 1
T-8 = Aplicando teorema 8
T-9 = Aplicando teorema 9

$F = ABC + A\overline{B}(\overline{\overline{A}\,\overline{C}})$	**T-9**
$= ABC + A\overline{B}(A + C)$	**T-8**
$= ABC + A\overline{B}A + A\overline{B}C$	**T-1**
$= ABC + A\overline{B} + A\overline{B}C$	
$= AC(B + \overline{B}) + A\overline{B}$	**T-8**
$= AC + A\overline{B}$	**T-8**
$= A(C + \overline{B})$	

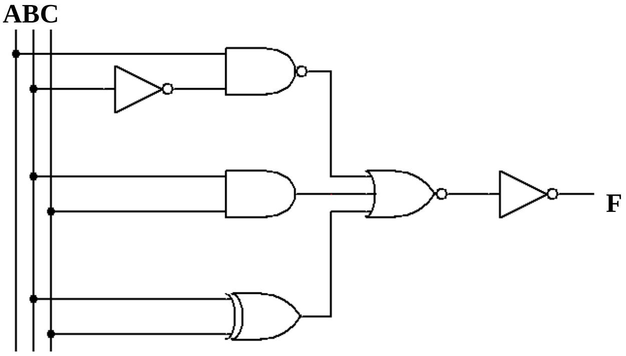
Por último dibujamos el circuito correspondiente a la expresión simplificada, quedando de la siguiente manera:



Problema 12:

Con el circuito mostrado en la figura:

a) Encontrar su función lógica.
b) Mostrar su correspondiente tabla de verdad.
c) Encontrar su función lógica equivalente con compuertas NO-Y (NAND) de dos entradas y dibujar el circuito correspondiente.



Solución:

a) $\overline{\overline{\overline{A\,\overline{B}} + BC + B\overline{C} + C\overline{B}}}$

b) Una tabla de verdad es una tabulación con todas las combinaciones que se pueden tener de las variables implicadas en una expresión booleana, y nos sirve para analizar la respuesta de dicha expresión booleana.

A continuación se muestra la tabla de verdad para la función obtenida en el inciso a:

A	**B**	**C**	**Salida**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

c) En este inciso todo el tiempo haremos uso del teorema 9:

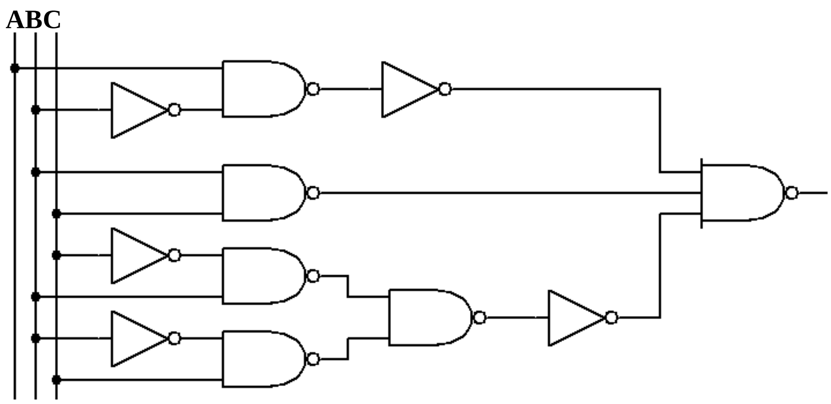
$\overline{A\,\overline{B}} + BC + B\overline{C} + \overline{C}B$ **T-9**

$\overline{\overline{\overline{A\overline{B}}}\;\overline{BC}} + B\overline{C} + \overline{C}B$ **T-9**

$\overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{B}}}}\;\overline{BC}\;\overline{B\overline{C}}} + \overline{C}B$ **T-9**

$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{B}}}\;\overline{BC}}}\;\overline{B\overline{C}}}\;C\overline{B}}$

Ahora implementaremos la función anterior con compuertas NO-Y de dos entradas:



Problema 13:

Utilice el método del mapa de Karnaugh para simplificar la siguiente expresión:

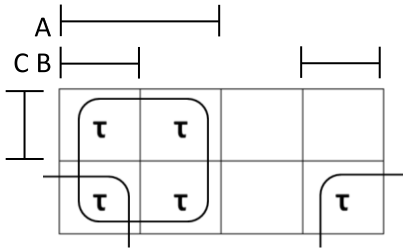
$$X = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

Solución:

Primero pasaremos a la función **X** a su forma canónica.

$$X_{CANONICA} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + (A + \overline{A})\overline{B}C + \overline{A}B(C + \overline{C})$$
$$= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$$

Ahora pasamos la función $X_{CANONICA}$ al mapa de Karnaugh para tres variables.



Por último la función simplificada que obtuvimos del mapa es:

$\overline{A} + \overline{B}C$

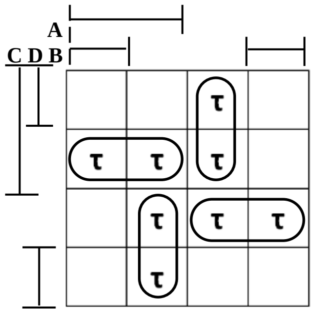
Problema 14:

Haciendo uso de un mapa de Karnaugh, encuentre la mínima expresión para:

$$\overline{A}\overline{B}CD + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D$$

Solución:

La función se encuentra en su forma canónica por lo que solo debemos pasarla al mapa y reducirla:



La función simplificada es:

$$\overline{A}\overline{B}C + AC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}\overline{D}$$

Problema 15:

Simplificar la siguiente función booleana mediante un mapa de Karnaugh:

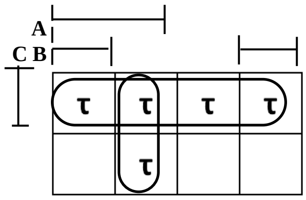
$$F = \overline{A}C + \overline{A}B + A\overline{B}C + BC$$

Solución:

Primeramente encontraremos la función canónica de “F”:

$\overline{A}C(B + \overline{B}) + \overline{A}B(C + \overline{C}) + A\overline{B}C + BC(A + \overline{A})$
$\overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC$
$\overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$

Ahora debemos pasar la función al mapa y reducirla:



La función reducida queda de la siguiente manera:

$$F_{REDUCIDA} = C + \overline{A}B$$

Problema 16:

Simplifique la función F, utilice el método del mapa de Karnaugh:

F (W, X, Y, Z) = Σ (1, 3, 7, 11, 15)
Dónde: d (W, X, Y) = Σ (0, 2, 5) son condiciones No-Importa.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es dar pesos a cada una de las variables W, X, Y, Z.

PESOS	**8**	**4**	**2**	**1**
	W	X	Y	Z

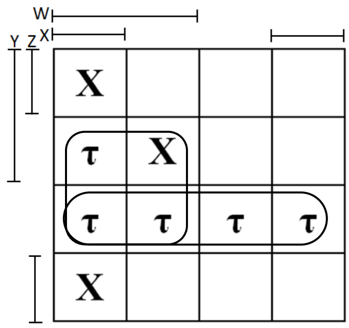
Ahora según el número asignado en “F” o en “d” nos fijaremos en la tabla de pesos y pondremos la o las variables correspondientes , por ejemplo si en “F” aparece un 7, las variables correspondientes a 7 en la tabla son X, Y y Z, ya que si sumamos los pesos de X, Y y Z nos dan 7. Además debemos agregar las variables faltantes pero se pondrán negadas, retomando el ejemplo anterior finalmente nos quedaría:

$$\overline{W}XYZ$$

De acuerdo a lo anterior:

F (W, X, Y, Z) = $\overline{W}\overline{X}\overline{Y}Z + \overline{W}\overline{X}YZ + \overline{W}XYZ + W\overline{X}YZ + WXYZ$
d (W, X, Y) = $\overline{W}\overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{W}\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{W}X\overline{Y}Z$

El siguiente paso es llenar nuestro mapa para simplificar la función:



Por lo tanto la función simplificada es:

$$(\overline{W}Z + YZ)$$

Problema 17:

Simplifique la siguiente función booleana con la ayuda de un mapa de Karnaugh:

F (A, B, C, D, E) = Σ (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)

Solución:

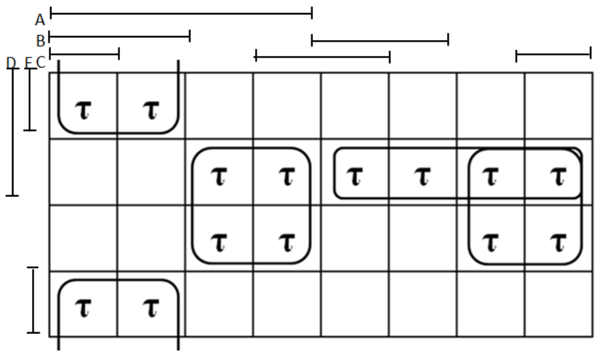
Primero daremos pesos a cada una de las variables A, B, C, D, E.

PESOS	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
	A	B	C	D	E

Ahora a semejanza del problema anterior sustituimos los números de “F” por sus correspondientes variables con la ayuda de la tabla, quedando de la siguiente manera:

$$F(A, B, C, D, E) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}CD\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}B\bar{C}DE$$
$$+\bar{A}BC\bar{D}E + \bar{A}BCDE + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + A\bar{B}C\bar{D}E + AB\bar{C}\bar{D}E + AB\bar{C}DE + ABC\bar{D}E + ABCDE$$

Las variables de la función anterior las pasamos al mapa correspondiente como se ve a continuación:



Por lo tanto la función simplificada es:

$$F = \bar{B}E + A\bar{D}E + \bar{A}\overline{BE}$$

Problema 18:

Empleando la función inversa simplifique la siguiente expresión:

$$f(A, B, C, D) = \sum 2, 6, 7, 8, 12, 13$$

Solución:

Primero obtenemos la función inversa de “f”, la cual contendrá todos los números faltantes en “f” desde 0-15 ya que son 4 variables (A, B, C, D) y 2^4 = 16 números. Por lo tanto la función inversa es la siguiente:

$f_{INVERSA}$ (A, B, C, D) = ∑0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 14, 15

Luego damos pesos a cada una de las variables A, B, C, D.

PESOS	**8**	**4**	**2**	**1**
	A	B	C	D

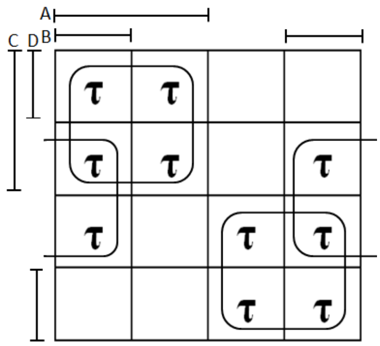
Ahora según el numero asignado en f nos fijaremos en la tabla de pesos y pondremos la o las variables correspondientes, por ejemplo si en f aparece un 3 las variables correspondientes a 3 son C y D ya que si sumamos los pesos de C y D nos dan 3.

Además debemos agregar las variables faltantes pero se pondrán negadas, retomando el ejemplo anterior finalmente nos quedaría $\overline{A}\overline{B}CD$.

De acuerdo con lo anterior:

$f_{INVERSA}$ (A, B, C, D) = $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}CD + ABC\overline{D} + ABCD + A\overline{B}C\overline{D}$

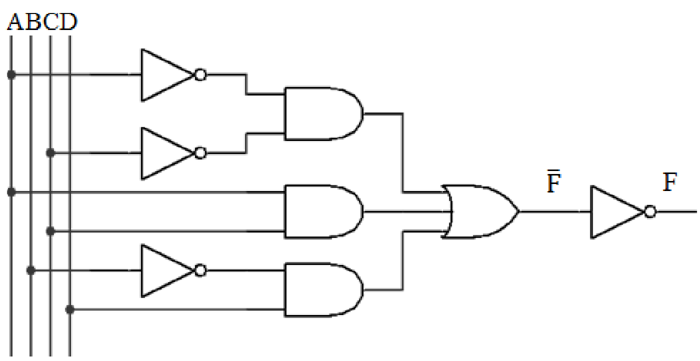
Ahora pasaremos los términos al mapa de Karnaugh de cuatro variables:



Del mapa obtenemos la expresión simplificada:

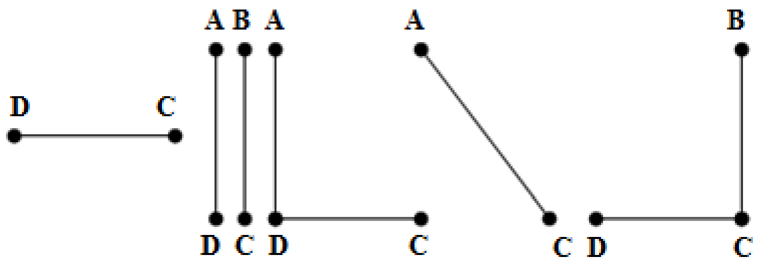
$$\overline{A}\overline{C} + \overline{B}D + AC$$

Por ultimo dibujamos el circuito correspondiente a la expresión simplificada, quedando de la siguiente manera:



Problema 19:

Textura es la organización de una superficie como un conjunto de elementos repetidos. En un proceso automático para clasificar texturas artificiales, un sensor de 4 puntos (como el mostrado en la figura 2) envía señales a un circuito combinatorio cuya tarea es discriminar (emitiendo pulsos [1]) los siguientes elementos:



En todos los casos que inspecciona el sensor se activan al menos dos puntos de la rejilla (por consiguiente, no se presentan casos en los cuales se activa tan solo un punto, ni casos en los que no se activa ningún punto).

Minimizar la función booleana F(A, B, C, D) a la salida del circuito discriminador haciendo uso de condiciones irrelevantes (o No-Importa). Realizar el circuito mediante inversores y compuertas NO-Y(o NAND).

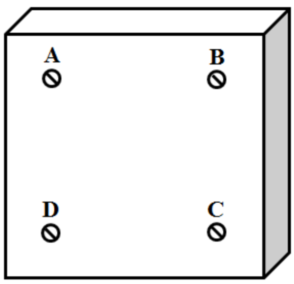


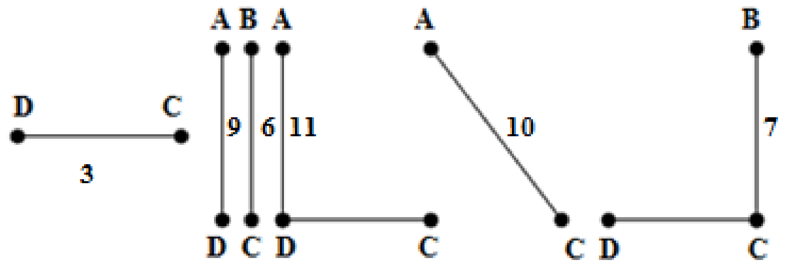
Figura 2. Sensor de cuatro puntos

Solución:

Dando pesos a cada una de las variables A, B, C, D se tiene:

PESOS	**8**	**4**	**2**	**1**
	A	B	C	D

Ahora, sumando los pesos de las variables que conforman a cada uno de los elementos:

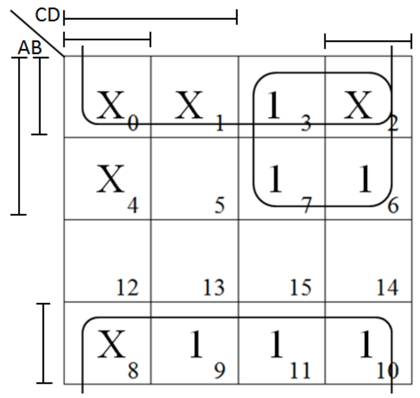


Entonces la función F (A, B, C, D) queda:

F (A, B, C, D) = Σ (3, 6, 7, 9, 10, 11)

Y las condiciones irrelevantes (o No-Importa) son 0, 1, 2, 4, 8.

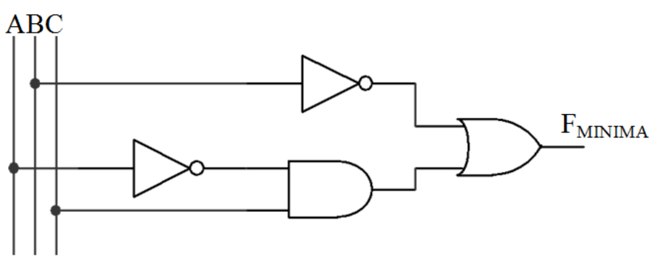
Pasamos las funciones a su correspondiente mapa quedando de la siguiente manera:



Por lo tanto la función mínima es:

$F_{MINIMA} = \overline{B} + \overline{A}C$

Implementando con compuertas la función minimizada:



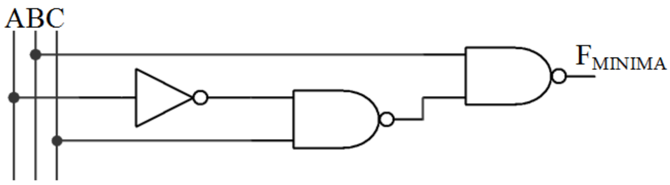
Pero requerimos la utilización de compuertas NO-Y(o NAND), así que utilizamos las leyes de Morgan (T-9).

$F = \overline{B} + \overline{A}C$

$F = \overline{\overline{\overline{B}}(\overline{\overline{A}C})}$ **T-9**

$F = \overline{B(\overline{\overline{A}C})}$ **T-5**

Por ultimo implementamos con compuertas NO-Y la función anterior:



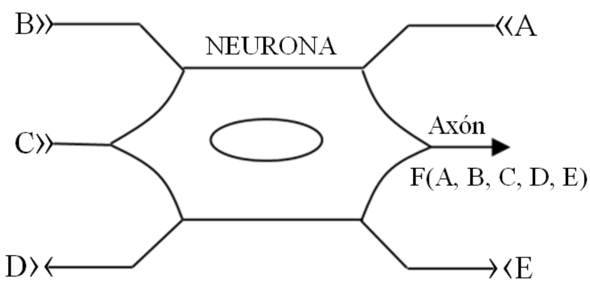
Problema 20:

El sistema nervioso humano, incluyendo al cerebro, está hecho de billones de células especializadas llamadas neuronas. Cada neurona posee sinapsis (nodos, puntos de conexión con otras neuronas) que pueden ser de dos tipos: (1) excitatorias e (2) inhibitorias. Cada neurona tiene una sola terminal de salida, (la cual se denomina axón), y transmite por ella una señal [1] cuando el número de sinapsis excitatorias con entradas [1], excede al número de sinapsis inhibitorias con entrada [1] por al menos el número N (umbral de la neurona).

Determine la función de la salida F(A, B, C, D, E) en el axón de la neurona, dadas las siguientes condiciones:

- N=1.
- No se presenta nunca el caso en el cual el número de “unos” en las sinapsis de excitación es igual al número de “unos” en la sinapsis de inhibición.

Minimizar F mediante mapas de Karnaugh haciendo uso de las condiciones irrelevantes (o No-Importa) implementar con compuertas No- Y (o NAND).



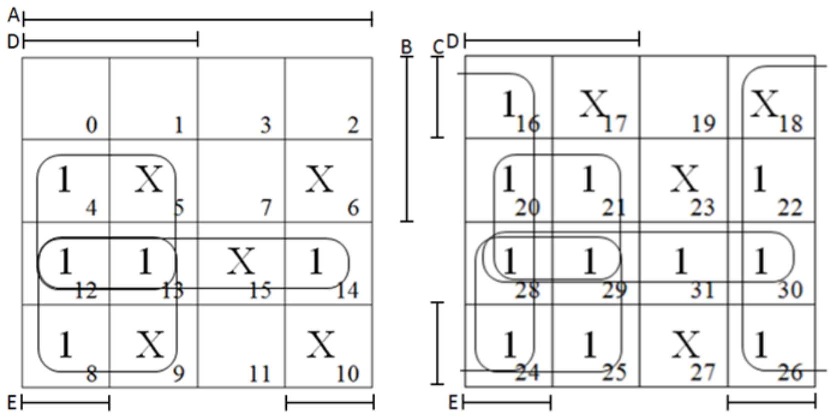
A, B, C Sinapsis de excitación.
D, E Sinapsis de inhibición.

Solución:

Lo primero es hacer una tabla de verdad en donde se consideren todas las condiciones mencionadas:

Excitación			**Inhibición**		**Salida**
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	X
0	0	1	1	0	X
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	X
0	1	0	1	0	X
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	X
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	X
1	0	0	1	0	X
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	X
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	X
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Ahora pasamos la tabla anterior a un mapa de Karnaugh de 5 variables.



Como se puede observar el mapa anterior difiere del que hemos usado hasta ahora, esto es con el fin de mostrar que existen muchas formas de expresar el mapa de Karnaugh, por lo que solo podemos recomendar se use la que más se nos facilite.

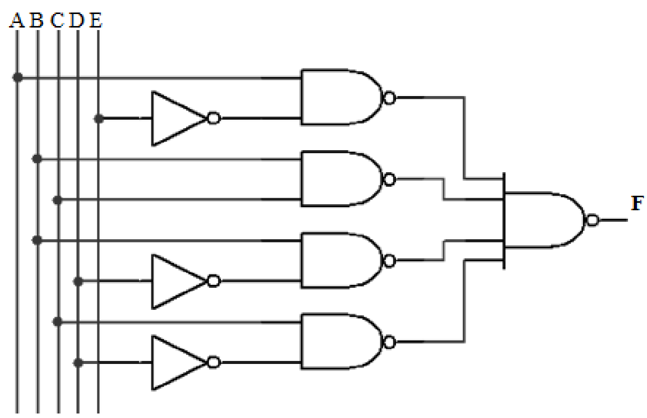
La función reducida obtenida del mapa queda de la siguiente manera:

$F_{REDUCIDA} = A\overline{E} + BC + B\overline{D} + C\overline{D}$

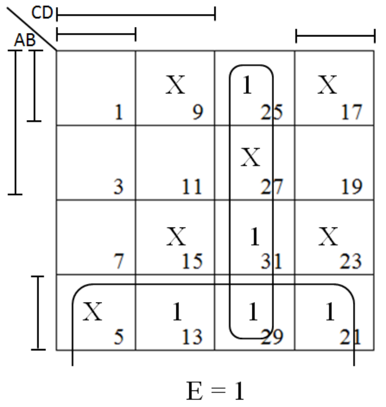
Para hacer la implementación con compuertas NO-Y debemos aplicar las leyes de Morgan (T-9) a la función anterior.

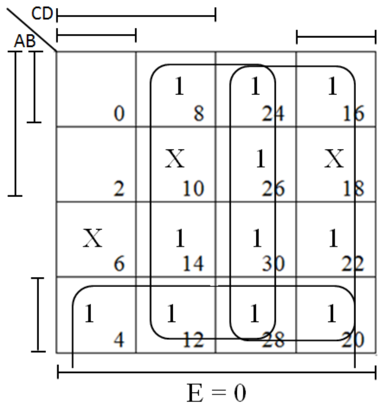
$$
\begin{aligned}
F_{REDUCIDA} &= A\overline{E} + BC + B\overline{D} + C\overline{D} && \textbf{T-9} \\
&= \overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{BC}} + B\overline{D} + C\overline{D} && \textbf{T-9} \\
&= \overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{BC}}}\;\overline{B\overline{D}}} + C\overline{D} && \textbf{T-9} \\
&= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{BC}}}\;\overline{B\overline{D}}}}\;\overline{C\overline{D}}} && \textbf{T-5} \\
&= \overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{BC}\;\overline{B\overline{C}}\;\overline{C\overline{D}}}
\end{aligned}
$$

Implementamos la función anterior con compuertas NO-Y:



La respuesta anterior es correcta pero, ¿Qué pasaría si realizáramos el mismo problema con otro tipo de mapa? ¿Obtendríamos el mismo resultado? Veamos:





La función reducida obtenida del mapa es la siguiente:

$F_{REDUCIDA} = A\overline{E} + B\overline{E} + AB + C\overline{D}$

Al comparar las dos respuestas vemos que no son idénticas pero si equivalentes, y con esto comprobamos que no todos los métodos nos llevan a un resultado idéntico.

Para hacer la implementación con compuertas NO-Y debemos aplicar las leyes de Morgan (T-9) a la función obtenida.

$$F_{REDUCIDA} = A\overline{E} + C\overline{D} + AB + B\overline{E} \qquad \textbf{T-9}$$

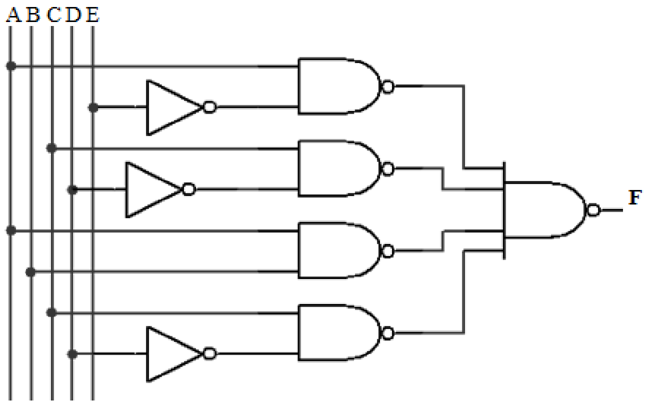
$$= \overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{C\overline{D}}} + AB + B\overline{E} \qquad \textbf{T-9}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{C\overline{D}}}}\;\overline{AB}} + B\overline{E} \qquad \textbf{T-9}$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A\overline{E}}\;\overline{C\overline{D}}}}\;\overline{AB}}}\;\overline{\overline{B\overline{E}}}} \qquad \textbf{T-5}$$

$$= \overline{\overline{A\overline{E}} + \overline{C\overline{D}} + \overline{AB} + \overline{B\overline{E}}}$$

Por último implementamos la función con compuertas NO-Y:



Problema 21:

Construya mediante un circuito combinatorio una maquina súper-elemental que reconozca, emitiendo la señal [1] a la salida, si alguno de los siguientes hechos ocurren en la historia de "*Alicia en el país de las maravillas*":

- Alicia corre detrás de alguien.
- La liebre de Marzo salta sobre el Sombrero Loco.
- Alguien salta sobre la Reina de Corazones.
- La liebre corre detrás de la Reina de Corazones.

Codifique del siguiente modo los fragmentos (proposiciones) que debe reconocer la maquina:

a) Asigne a los cuatro personajes etiquetas binarias en orden alfabético:

   - Alicia **00**.
   - La liebre de Marzo **01**.
   - La Reina de Corazones **10**.
   - El Sombrero Loco **11**.

b) Relaciones:

   - "**X** corre detrás de **Y**" con la etiqueta **0**.
   - "**X** salta sobre **Y**" con la etiqueta **1**.

Ejemplo: La proposición "La Reina de Corazones salta sobre el Sombrero Loco" se transforma en **10111**.

Condición adicional: en esta historia nadie puede correr detrás de Alicia ni saltar sobre ella. Observe que nadie puede correr detrás de sí mismo, ni saltar sobre sí mismo.
Minimizar el circuito usando mapas de Karnaugh. Haga uso de condiciones irrelevantes.

Solución:

I. Alicia corre detrás de alguien:

   - 00001 (1 Binario).
   - 00010 (2 Binario).
   - 00011 (3 Binario).

II. La liebre de Marzo salta sobre el Sombrero Loco:

   - 01111 (15 Binario).

III. Alguien salta sobre la Reina de Corazones:

- 00110 (6 Binario).
- 01110 (14 Binario).
- 11110 (30 Binario).

IV. La liebre de Marzo corre detrás de la Reina de Corazones:

- 01010 (10 Binario).

Condiciones irrelevantes:

I. Nadie puede correr detrás de sí mismo:

- 00000 (0 Binario).
- 01001 (9 Binario).
- 10010 (18 Binario).
- 11011 (27 Binario).

II. Nadie puede saltar sobre sí mismo:

- 00100 (4 Binario).
- 01101 (13 Binario).
- 10110 (22 Binario).
- 11111 (31 Binario).

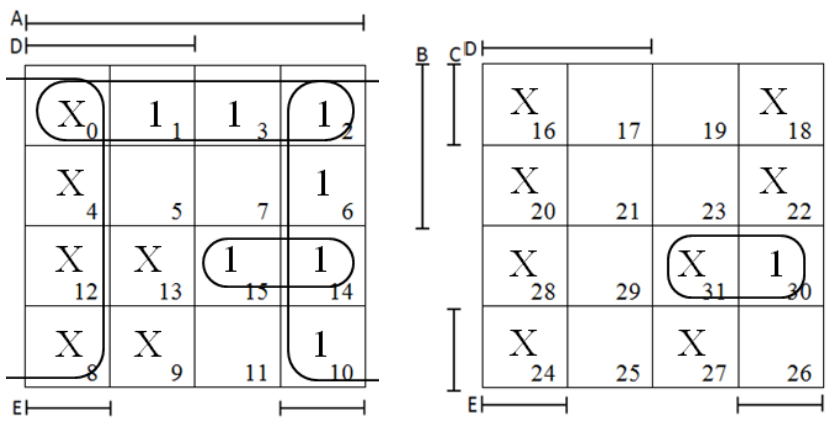
III. Nadie puede correr detrás de Alicia:

- 01000 (8 Binario).
- 10000 (16 Binario).
- 11000 (24 Binario).

IV. Nadie puede saltar sobre Alicia:

- 01100 (12 Binario).
- 10100 (20 Binario).
- 11100 (28 Binario).

Ahora pasaremos lo anterior a un mapa de Karnaugh:



La función mínima para realizar la máquina súper-elemental es:

$$F = \overline{A}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + BCD$$

Problema 22:

Un robot de juguete está diseñado para ser capaz de seguir una trayectoria, (previamente programada por medio de controles que el robot tiene en la espalda), avanzando cuadro por cuadro en un área de 5x6 cuadros. El robot puede realizar una de las cuatro acciones siguientes:

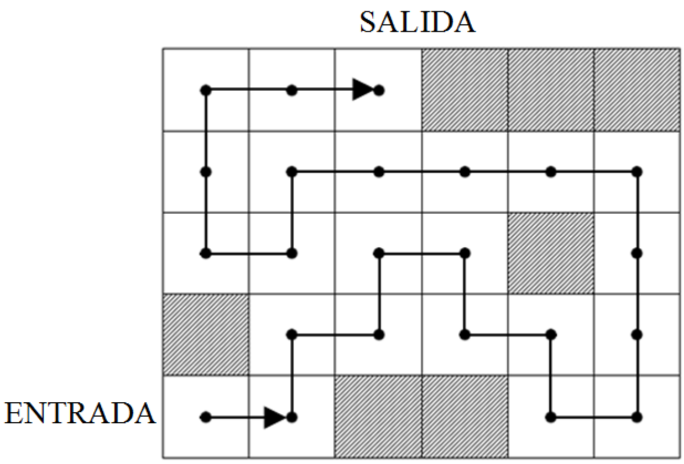
a) (Girar sobre su eje vertical) 90º a la derecha y luego avanzar al centro del siguiente cuadro si su pequeño cerebro recibe la señal binaria **01**.

b) Girar 90º a la izquierda y luego avanzar al centro del siguiente cuadro si su diminuto cerebro percibe la señal binaria **10**.

c) Avanzar al frente un cuadro si su limitado cerebro recibe la señal **00**.

d) Hacer alto si su cerebro recibe la señal **11**.

Programar el robot para que recorra el laberinto de la figura 3.

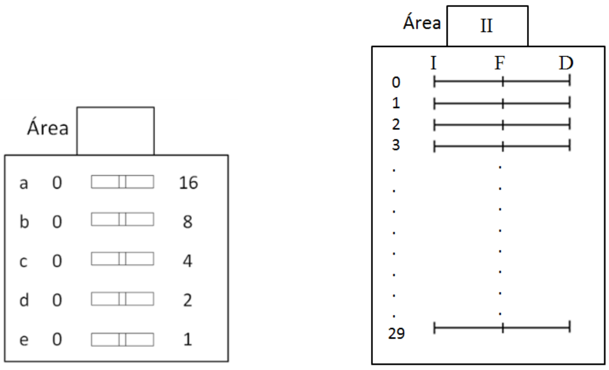


0	3	4	15	16	29
1	2	5	14	17	28
8	7	6	13	18	27
9	10	11	12	19	26
20	21	22	23	24	25

Figura 3. Laberinto

Determinar las funciones booleanas del par de estímulos binarios que recibe el mini-cerebro del robot durante este recorrido y minimizarlas mediante mapas de Karnaugh. Hacer uso de las condiciones irrelevantes.

Los controles en la espalda del robot están localizados en tres áreas. En el área I se indicará el cuadro inicial mediante los controles de dos posiciones **A, B, C, D, E** como se ve en la figura 4:



Área I: cuadro inicial **Trayectoria**

Área II: cuadro final

Figura 4. Área de los controles.

Si el control **A** se presiona del lado derecho, el peso de la variable **A** se contabilizará para determinar el número asignado al cuadro inicial (lo mismo ocurrirá para el resto de las variables). En el área II se programa la trayectoria por medio de treinta controles de tres posiciones cada uno: **I-F-D** (a lo largo de una ranura). En el área III similar al área I se indicará el último cuadro de la trayectoria; en este cuadro el cerebro del robot recibirá la señal **11**.

Solución:

Llenaremos la tabla de verdad comenzando a partir del cuadro número 20 y siguiendo sucesivamente la trayectoria del robot cuadro por cuadro en la figura ¿? hasta finalizar en el cuadro 4.

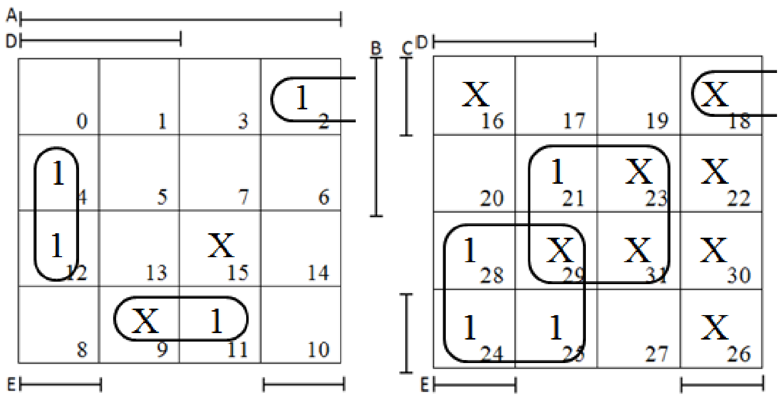
Las condiciones irrelevantes son los cuadros no utilizados por el robot, así como los cuadros 30 y 31 para completar un mapa de Karnaugh de 5 variables.

Numero de cuadro	**Control**	f_1	f_2
0	D	0	1
1	F	0	0
2	I	1	0
3	F	0	0
4	A	1	1
5	F	0	0
6	D	0	1

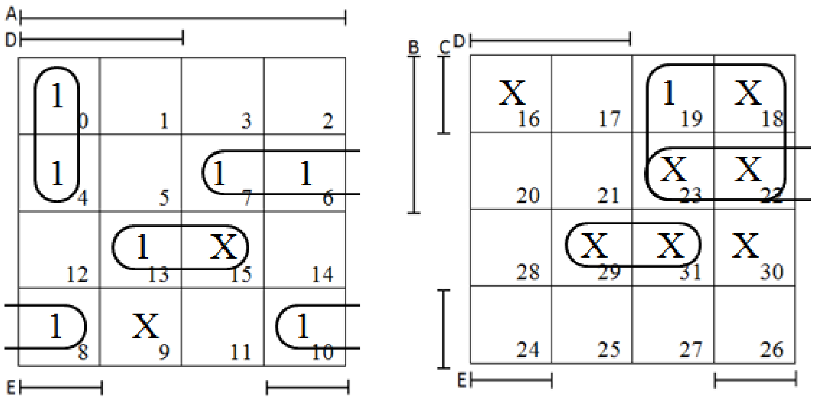
7	D	0	1
8	D	0	1
9	X	X	X
10	D	0	1
11	I	1	0
12	I	1	0
13	D	0	1
14	F	0	0
15	X	X	X
16	X	X	X
17	F	0	0
18	X	X	X
19	D	0	1
20	F	0	0
21	I	1	0
22	X	X	X
23	X	X	X
24	I	1	0
25	I	1	0
26	F	0	0
27	F	0	0
28	I	1	0
29	X	X	X
30	X	X	X
31	X	X	X

Pasando la información de cada cuadro a un mapa para f_1 y f_2, obtenemos:

Para $f_{1:}$



$$f1 = AB\overline{D} + ACE + \overline{A}C\overline{D}\overline{E} + \overline{A}B\overline{C}E + \overline{B}CD\overline{E}$$



$f2 = A\bar{B}D + \bar{B}CD + BCE + \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}\bar{E}$

Problema 23:

Puede remplazarse un dispositivo que realiza la función:

$F = XZ + W\bar{Y}$

Por otro que realiza la función:

$G = (W + X)(\bar{Y} + Z)(\bar{W} + X + \bar{Y})(W + Y + Z)$

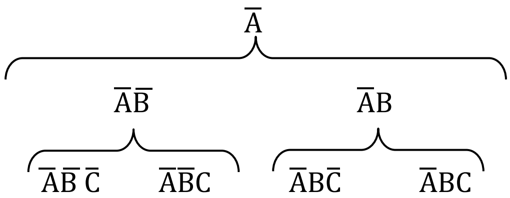
Solución:

Debemos de expandir las funciones en todos sus Minitérminos o Maxitérminos correspondientes según sea el caso, por medio de un árbol; siguiendo las siguientes reglas:

1. Expandir un árbol para cada término de la ecuación.
2. Colocar dos ramas a partir del término inicial e ir sumando o multiplicando los términos faltantes, en una rama, una variable y en la otra la variable negada. Continuando la expansión para cada rama hasta completar todas las ramas con todas las variables de la función.

Ejemplo: $F(A,\ B,\ C) = \bar{A} + B\bar{C}$

La función cuenta con tres variables, desarrollando la expansión para cada término:



$$\overbrace{\overline{A}B\overline{C} \qquad AB\overline{C}}^{\overline{B}\,\overline{C}}$$

Los Minitérminos correspondientes son:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

Dando pesos a la función:

PESO	4	2	1
VARIABLE	A	B	C

$$F(A,B,C) = \sum(0,1,2,3,6)$$

Para la función $F = XZ + W\overline{Y}$ es de la forma $\sum$, las variables son: W, X, Y, Z para esta función:

$$\overbrace{\overbrace{\underset{5}{\overline{W}X\overline{Y}Z} \qquad \underset{7}{\overline{W}XYZ}}^{\overline{W}XZ} \qquad \overbrace{\underset{13}{WX\overline{Y}Z} \qquad \underset{15}{WXYZ}}^{WXZ}}^{XZ}$$

$$\overbrace{\overbrace{\underset{8}{W\overline{XY}\,\overline{Z}} \qquad \underset{9}{W\overline{XY}Z}}^{W\overline{XY}} \qquad \overbrace{\underset{12}{WX\overline{Y}\,\overline{Z}} \qquad \underset{13}{WX\overline{Y}Z}}^{WX\overline{Y}}}^{W\overline{Y}}$$

Para $G = (W + X)(\overline{Y} + Z)(\overline{W} + X + \overline{Y})(W + Y + Z)$

$$\overbrace{\overbrace{\underset{3}{W + X + \overline{Y} + \overline{Z}} \qquad \underset{2}{W + X + \overline{Y} + Z}}^{W + X + \overline{Y}} \qquad \overbrace{\underset{1}{W + X + Y + \overline{Z}} \qquad \underset{0}{W + X + Y + Z}}^{W + X + Y}}^{W + X}$$

$$\overbrace{\overbrace{\underset{14}{\overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+Z} \quad \underset{10}{\overline{W}+X+\overline{Y}+Z}}^{\overline{W}+\overline{Y}+Z} \quad \overbrace{\underset{6}{W+\overline{X}+\overline{Y}+Z} \quad \underset{2}{W+X+\overline{Y}+Z}}^{W+\overline{Y}+Z}}^{\overline{Y}+Z}$$

$$\overbrace{\underset{11}{\overline{W}+X+\overline{Y}+\overline{Z}} \quad \underset{10}{\overline{W}+X+\overline{Y}+Z}}^{\overline{W}+X+\overline{Y}}$$

$$\overbrace{\underset{4}{W+\overline{X}+Y+Z} \quad \underset{0}{W+X+Y+Z}}^{W+Y+Z}$$

$G = \pi\ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 14)$

Las condiciones ahora son:

$$A \cup B = \{0 - n\} \quad \text{y} \quad A \cap B = \phi$$

Esto es, la unión de todos los elementos posibles con r variables.

Para nuestro problema son cuatro variables que pueden direccionar a 16 elementos

$2^r = n$
$2^4 = 16$ elementos [0-15]

Si estas consideraciones se cumplen los dispositivos si se pueden remplazar.

$F \cup G = \{0, 1, 2, \dots \dots, 15\}$
$F \cup G = \phi$

Por lo tanto si se pueden remplazar.

Demostrando por medio del algebra de Boole y utilizando las siguientes igualdades:

$A + 1 = 1$ **T-4**

$\overline{A} + 1 = 1$ **T-4**

Si:

$F = XZ + W\overline{Y}$

$G = (W + X)(\overline{Y} + Z)(\overline{W} + X + \overline{Y})(W + Y + Z)$

$G = (W\overline{Y} + WZ + X\overline{Y} + XZ)(\overline{W} + X + \overline{Y})(W + Y + Z)$

$G = (WX\overline{Y} + W\overline{Y} + WXZ + W\overline{Y}Z + \overline{W}X\overline{Y} + X\overline{Y} + X\overline{Y} + \overline{W}XZ + XZ + X\overline{Y}Z)(W + Y + Z)$

$G = (W\overline{Y}(X + 1) + XZ(W + \overline{W}) + X\overline{Y}(1 + \overline{W}) + W\overline{Y}Z + XZ(1 + \overline{Y})(W + Y + Z))$

$G = (W\overline{Y} + XZ + X\overline{Y} + W\overline{Y}Z + XZ)(W + Y + Z)$

$G = (W\overline{Y}(1 + Z) + X\overline{Y} + XZ)(W + Y + Z)$

$G = (W\overline{Y} + X\overline{Y} + XZ)(W + Y + Z)$

$G = W\overline{Y} + W\overline{Y}Z + WXZ + XYZ + XZ + WX\overline{Y} + X\overline{Y}Z$

$G = W\overline{Y}(1 + Z) + WXZ + XZ(Y + 1) + WX\overline{Y} + X\overline{Y}Z$

$G = W\overline{Y} + WXZ + XZ + WX\overline{Y} + X\overline{Y}Z$

$G = W\overline{Y}(1 + X) + XZ(W + 1) + X\overline{Y}Z$

$G = W\overline{Y} + XZ + X\overline{Y}Z$

$G = W\overline{Y} + XZ(1 + \overline{Y})$

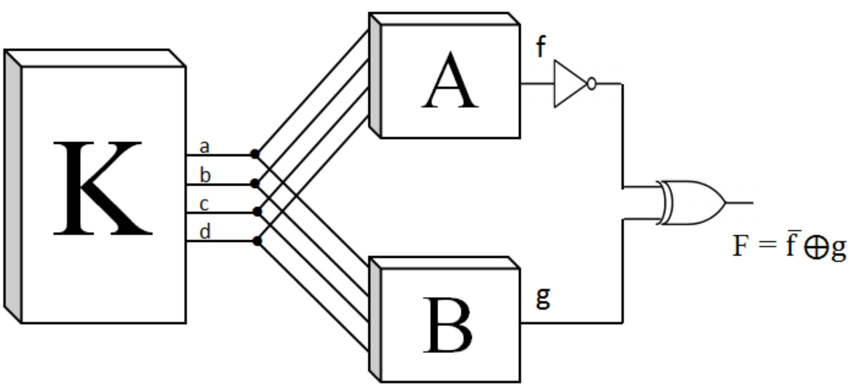
$G = W\overline{Y} + XZ$

Por lo tanto G = F

Problema 24:

Minimizar la función $F = \overline{f} \oplus g$ de la salida del circuito combinatorio de la figura 4. El dispositivo A tiene por salida la función $f = (a + b)(a + d)(\overline{b} + c)$, en tanto que el dispositivo B tiene como salida $g = a\overline{b} + a\overline{c}$

El dispositivo K alimenta A y B enviando todas las señales lógicamente posibles excepto 1100 y 1101. Haga uso de las condiciones irrelevantes. Implemente la función mínima mediante compuertas NO-Y (o NAND).



Solución:

Asignando los pesos a las variables del circuito K tenemos:

PESO	8	4	2	1
	a	b	c	d

Para la función f, debemos de encontrar los Maxitérminos correspondientes:

$$\overbrace{\overbrace{a+b+\bar{c}+\bar{d}\quad a+b+\bar{c}+d}^{a+b+\bar{c}}\quad \overbrace{a+b+c+\bar{d}\quad a+b+c+d}^{a+b+c}}^{a+b}$$

$$3 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0$$

$$\overbrace{\overbrace{a+\bar{b}+\bar{c}+d\quad a+\bar{b}+c+d}^{a+\bar{b}+d}\quad \overbrace{a+b+\bar{c}+d\quad a+b+c+d}^{a+b+d}}^{a+d}$$

$$6 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 0$$

$$\overbrace{\overbrace{\bar{a}+\bar{b}+c+\bar{d}\quad \bar{a}+\bar{b}+c+d}^{\bar{a}+\bar{b}+c}\quad \overbrace{a+\bar{b}+c+\bar{d}\quad a+\bar{b}+c+d}^{a+\bar{b}+c}}^{\bar{b}+c}$$

$$13 \qquad\qquad 12 \qquad\qquad 5 \qquad\qquad 4$$

$f \ = \ \pi(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13)$
$\bar{f} \ = \ \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13)$

Para la función g, debemos de encontrar los Minitérminos correspondientes:

$$\overbrace{\overbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\quad a\bar{b}\bar{c}d}^{a\bar{b}\bar{c}}\quad \overbrace{a\bar{b}c\bar{d}\quad a\bar{b}cd}^{a\bar{b}c}}^{a\bar{b}}$$

$$8 \qquad 9 \qquad 10 \qquad 11$$

$$\overbrace{\overbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\quad a\bar{b}\bar{c}d}^{abc}\quad \overbrace{ab\bar{c}\bar{d}\quad ab\bar{c}d}^{abc}}^{a\bar{c}}$$

$$8 \qquad 9 \qquad 12 \qquad 13$$

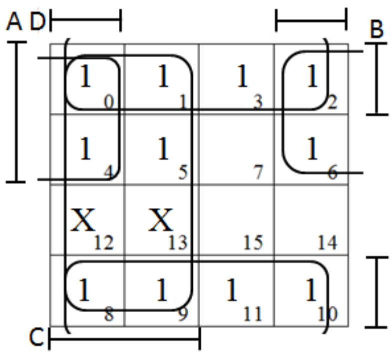
g = $\sum$ (8, 9, 10, 11, 12, 13)

Para encontrar $\bar{f} \oplus g$ hay que observar el comportamiento de la compuerta O-Exclusiva (o XOR), ver tabla de “Compuertas Lógicas”.

De la tabla de verdad concluimos que:

$\bar{f} \oplus g = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11)$
Y las condiciones irrelevantes son 1100 (12 Binario) y 1101 (13 Binario)

El correspondiente mapa de Karnaugh queda como sigue:



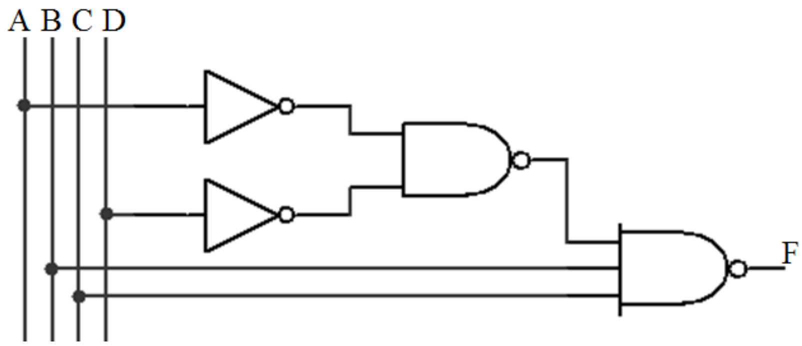
Por lo que la función mínima es:

$F = \bar{b} + \bar{c} + \bar{a}\bar{d}$

Ahora empleamos las leyes de Morgan (T-9) para convertir a compuertas NO-Y:

$F = \left[\overline{\overline{\bar{b} + \bar{c} + \bar{a}\,\bar{d}}}\right]$
$F = [\overline{\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}}(\overline{\bar{a}\,\bar{d}})}]$
$F = \left[\overline{bc(\overline{\bar{a}\bar{d}})}\right]$

Implementando la función anterior queda:



Comprobando la reducción de la función F por medio de algebra booleana tenemos:

Si: F = A⊕B
$= \bar{A}B + A\bar{B}$

Entonces: $F = \bar{f} \oplus g$
$= f\ g + \bar{f}\ \bar{g}$

Y utilizando las igualdades siguientes:

A+1 = 1	**T-4**
$\bar{A} + 1 = 1$	**T-4**
$A + \bar{A} = 1$	**T-2**
$A \cdot \bar{A} = 0$	**T-2**
$A + \bar{A}B = A + B$	**T-13**
$\bar{A} + AB = \bar{A} + B$	**T-13**

$f = (a + b)(a + d)(\bar{b} + c)$
$f = a\bar{b} + ac + bcd$
$\bar{f} = \left(\overline{a\,\bar{b}}\right)(\overline{ac})\left(\overline{bcd}\right)$
$\bar{f} = (\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$

$g = a\bar{b} + a\bar{c}$
$\bar{g} = \left(\overline{a\bar{b} + ac}\right)$
$\bar{g} = \left(\overline{a\bar{b}}\right)(\overline{a\bar{c}})$
$\bar{g} = (\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$

$fg = (a\bar{b} + ac + bcd)(a\bar{b} + a\bar{c})$
$= a\bar{b} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$
$= a\bar{b} + a\bar{b}c$
$= a\bar{b}$

$\bar{f}\,\bar{g} = (\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$
$= (\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + c)$
$= (\bar{a} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}b + b\bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + c)$
$= (\bar{a} + \bar{a}b + b\bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + c)$

$= (\bar{a} + b\bar{c})(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + c)$
$= (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + b\bar{c} + b\bar{c}\bar{d})(\bar{a} + c)$
$= (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + b\bar{c})(\bar{a} + c)$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + ab\bar{c} + \bar{a}\bar{d}c + \bar{a}c\bar{d}$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} + ab\bar{c}$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{c}(\bar{a} + ab)$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{c}(\bar{a} + \bar{b})$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} + b\bar{c}$
$= f\,g + \bar{f}\,\bar{g}$
$= a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$
$= \bar{b} + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} + b\bar{c}$
$= (\bar{b} + b\bar{c}) + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}$
$= \bar{b} + \bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}$
$= \bar{b} + \bar{c} + \bar{a}\bar{d}$

Ejercicios Propuestos

Problema 1:

Simplifique las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

a) $XY + X\bar{Y}$
b) $(X + Y)(X + \bar{Y})$
c) $XYZ + \bar{X}Y + XY\bar{Z}$
d) $ZX + Z\bar{X}Y$
e) $Y(W\bar{Z} + WZ) + XY$

Problema 2:

Demostrar la equivalencia de las siguientes funciones use teoremas.

a) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}CD + A\bar{B}CD + \bar{A}\,\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} = \bar{D} + \bar{B}C$
b) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}CD$
c) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B = \bar{A} + \bar{B}C$
d) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$

Problema 3:

Expandir las siguientes funciones booleanas a su forma canónica.

a) $f_1 = \overline{A}B + C$
b) $f_2 = AB + \overline{A}C + A\overline{B}C$
c) $f_3 = B + CD + AB\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$

Problema 4:

a) $A + C\overline{D}$
b) $1 + A + \overline{B} + C + \overline{D}$
c) $A + A\overline{B}C + DE + A\overline{B}$

Problema 5:

Obtenga las expresiones simplificadas en suma de productos para las siguientes expresiones booleanas.

a) $D(\overline{A} + B) + \overline{B}(C + AD)$
b) $ABD + \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{D}$
c) $\overline{K}L\overline{M} + \overline{K}\overline{M}N + KL\overline{M}\overline{N} + L\overline{M}\overline{N}$
d) $\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}D + AC\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD + B\overline{C}D$
e) $\overline{X}Z + \overline{W}X\overline{Y} + W(\overline{X}Y + X\overline{Y})$

Problema 6:

Obtenga las expresiones simplificadas en suma de productos para las siguientes funciones booleanas.

a) $F\,(X, Y, Z) = \Sigma\,(2, 3, 6, 7)$
b) $F\,(A, B, C, D) = \Sigma\,(7, 13, 14, 15)$
c) $F\,(W, X, Y, Z) = \Sigma\,(2, 33, 12, 13, 14, 15)$

Problema 7:

Simplifique cada una de las siguientes funciones e implántelas con compuertas NO-Y (NAND).

a) $F_1 = A\overline{C} + ACE + AC\overline{E} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}\overline{D}\,\overline{E}$
b) $F_2 = (\overline{B} + \overline{D})\,(\overline{A} + \overline{C} + D)(A + \overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})$

Problema 8:

Dada la función booleana:

$F = XY + \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{Y}Z$

a) Impleméntela solo con compuertas : Y, O, Inversor
b) Impleméntela solo con compuertas : O, Inversor
c) Impleméntela solo con compuertas : Y, Inversor

Problema 9:

Exprese las siguientes funciones como una suma de Minitérminos y un producto de Maxitérminos.

a) $F = (A, B, C, D) = D(\overline{A} + B) + \overline{B}D$
b) $F = (W, X, Y, Z) = \overline{Y}Z + WX\overline{Y} + WX\overline{Z} + \overline{W}\overline{X}Z$
c) $F = (A, B, C, D) = (A + \overline{B} + C)(A + \overline{B})(A + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + B + C + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$
d) $F = (A, B, C) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + C)$
e) $F = (X, Y, Z) = 1$
f) $F = (X, Y, Z) = (XY + Z)(Y + XZ)$

Problema 10:

Hallar la expresión mínima para:

a) $f_1(A, B, C) = \Sigma\,(0, 1, 3, 4, 6, 7)$
b) $f_2(A, B, C, D) = \Sigma\,(0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 15)$
c) $f_3(A, B, C, D) = \pi\,(0, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$
d) $f_4(A, B, C, D, E) = \Sigma\,(0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31)$

Problema 11:

Minimizar las siguientes funciones utilizando términos No-Importa para la simplificación, siempre que ello sea posible.

a) $f\,(A, B, C) = \Sigma\,3, 5 + \text{Términos No} - \text{Importa}\,(0, 7)$.
b) $f\,(A, B, C, D) = \Sigma\,1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11 + \text{Términos No} - \text{Importa}\,(9, 12, 15)$.
c) $f\,(A, B, C, D) = \pi\,0, 4, 7, 11, 14 + \text{Términos No} - \text{Importa}\,(6, 8, 9, 13)$.
d) $f\,(A, B, C, D) = \Sigma\,4, 5, 6, 7, 12, 14, 16, 20, 21, 24, 26, 27, 31 + \text{Términos No} - \text{Importa}\,(0, 11, 19, 22, 30)$.

Problema 12:

Se requiere un circuito para controlar el motor de una grabadora de cassettes cuando la microcomputadora envía información o bien recibe información de la grabadora. Determine las condiciones de entrada que se necesitan para activar el motor como un 1 lógico.

Problema 13:

Un comprador entrega a través de tres terminales los siguientes resultados:

$A > B$
$A = B$
$A < B$

Dicho comprador está conectado a un motor. Diseñar un circuito que permita un movimiento en sentido de las manecillas del reloj si A < B y en sentido contrario si A > B y sin movimiento si A = B.

Problema 14:

Un controlador de alarma funciona de acuerdo a lo siguiente:

- Si las señales A y B están en 1 de las 8 a las 11 A.M., la alarma debe de sonar.
- De las 11 A.M. a las 3 P.M., cualquiera de las dos entradas debe activarla.
- De las 3 P.M. a las 11 P.M, la alarma debe de activarse cuando cualquiera de las dos entradas sea cero.
- Finalmente de las 11 P.M. a las 8 A.M. la alarma debe activarse.

Problema 15:

La expresión booleana:

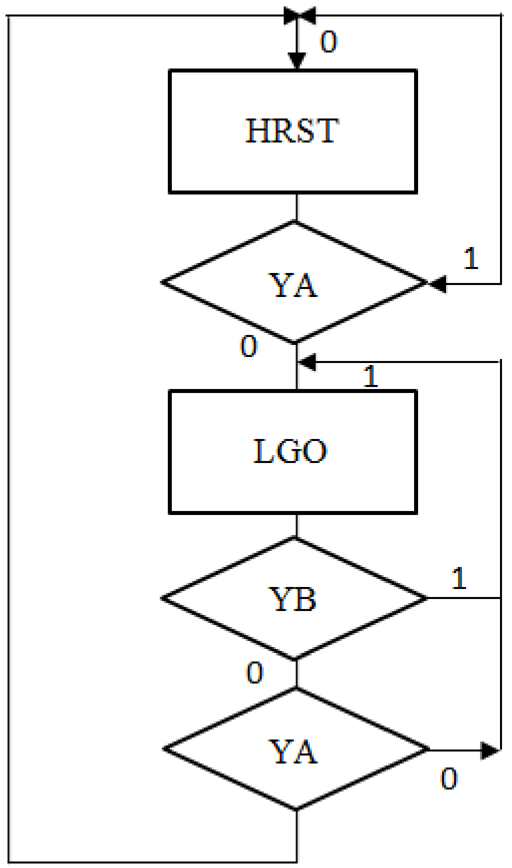
$BE + \overline{B}D\overline{E}$

Es una expresión simplificada de la expresión:
$\overline{A}BE + BCDE + B\overline{C}\overline{D}E + \overline{A}\,\overline{B}D\overline{E} + \overline{B}\overline{C}D\overline{E}$

¿Aquí hay condiciones No–Importa?, si es así,
¿Cuáles son?

Problema 16:

Diseñar un circuito que represente el diagrama de flujo de la figura:



Problema 17:

La figura representa un circuito multiplicador que forma dos bits, X_1 X_0 y Y_1 Y_0 y que produce una salida Z_3 Z_2 Z_1 Z_0. Diseñe el circuito multiplicador.

Problema 18:

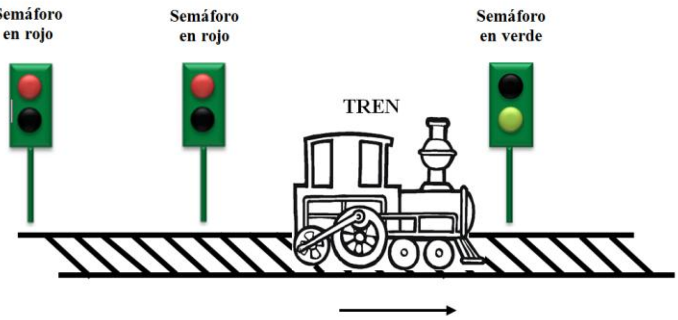
Diseñar un circuito que detecte en una estación receptora digital cuando se ha recibido un digito de código BCD.

Problema 19:

Diseñar un comparador de magnitud relativa que tiene como entrada dos dígitos de tres variables, como se muestra en la figura. Detectando a la salida alguna de las tres condiciones.

Problema 20:

En una interestación del metro de la ciudad de México se tienen varios semáforos, cada tren deja dos semáforos en rojo tras él y este solo tiene acceso al siguiente tramo de vía si el semáforo de enfrente está en verde. Diseñar el circuito que permita hacer lo anterior.



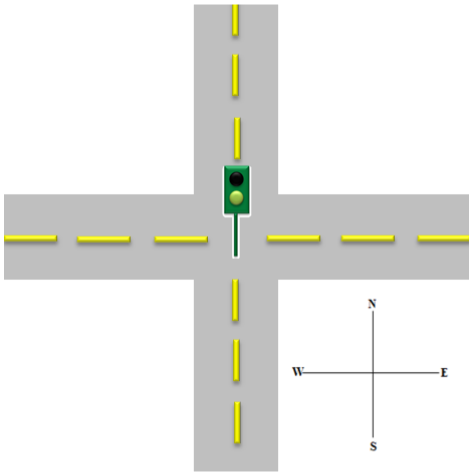
Problema 21:

En la figura se muestra la interacción de una autopista principal con un camino de acceso secundario.

Se colocan sensores de detección de vehículos a lo largo de los carriles C y D (camino principal) y en los carriles A y B (camino de acceso). Las lecturas (o salidas) del sensor son bajas (0), cuando no pasa ningún vehículo, y alta (1) cuando pasa algún vehículo. El semáforo del crucero se controlará de acuerdo con la siguiente lógica:

a) El semáforo E-W estará en luz verde siempre que los carriles C y D estén ocupados.
b) El semáforo E-W estará en luz verde siempre que los carriles C o D estén ocupados pero A y B no lo estén.
c) El semáforo N-S estará en luz verde siempre que los carriles A y B estén ocupados pero C y D no lo estén.
d) El semáforo N-S estará en luz verde cuando A y B estén ocupados en tanto que C y D estén vacantes.

El semáforo E-W estará en luz verde cuando no haya vehículos transitando. Utilizando las salidas A, B, C y D del sensor como entradas, diseñe un circuito lógico para controlar el semáforo. Debe haber 2 salidas, N/S y E/W, que pasen a alto cuando la luz correspondiente se torne verde.



Circuitos Aritméticos

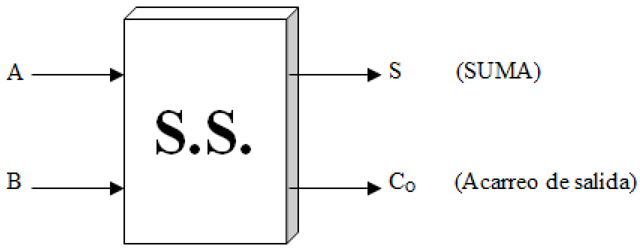
SUMADOR:

Puede ser de dos tipos:

a) Semi-Sumador.
b) Sumador Completo.

A continuación haremos el diseño del Semi-Sumador (s.s):

1. Diagrama a bloques.



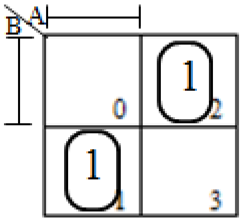
2. Tabla funcional.

Decimal	**A**	**B**		**S**	**C_0**
0	0	0		0	0
1	0	1		1	0
2	1	0		1	0
3	1	1		0	1

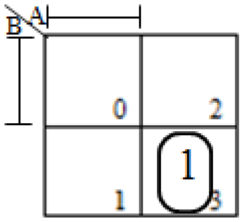
3. Función canónica.

$$S\,(AB) = \sum_m (1,2) \ \ y \ \ C_0(AB) = \sum_m (3)$$

4. Mapa de Karnaugh.

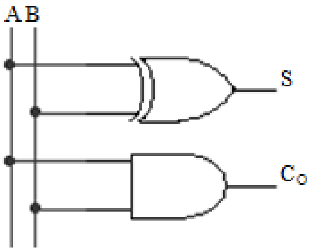


$$S(AB) = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$



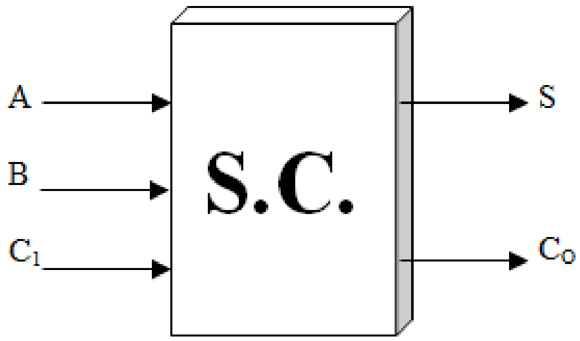
$$C_O(AB) = AB$$

5. Logigrama.



A continuación haremos el diseño del Sumador Completo (s.c):

1. Diagrama a bloques.



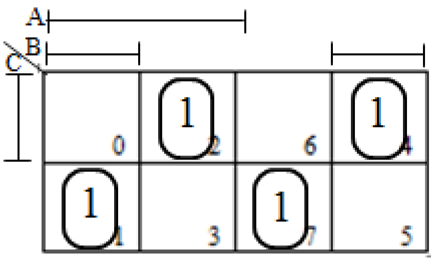
2. Tabla funcional

Decimal	**A**	**B**	**C_1**		**S**	**C_0**
0	0	0	0		0	0
1	0	0	1		1	0
2	0	1	0		1	0
3	0	1	1		0	1
4	1	0	0		1	0
5	1	0	1		0	1
6	1	1	0		0	1
7	1	1	1		1	1

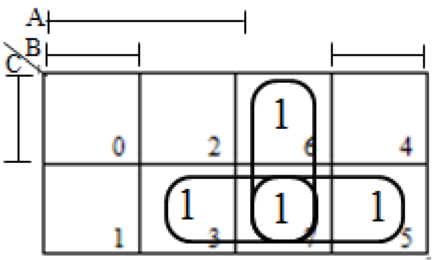
3. Función canónica

$S\ (ABC_i) = \sum_m (1, 2, 4, 7)$
$C_0(ABC_i) \ = \ \sum_m (3, 5, 6, 7)$

4. Mapa de Karnaugh.

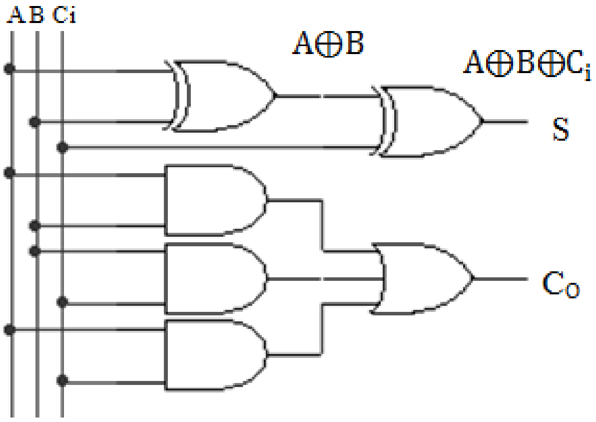


$S = A \oplus B \oplus C_i$

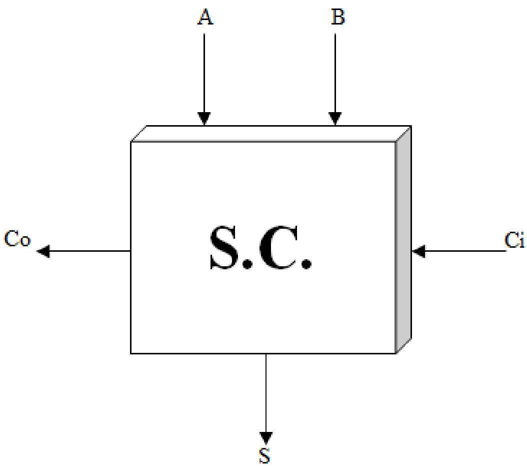


$C_O \ = AB + BC_i + AC_i$

5. Logigrama



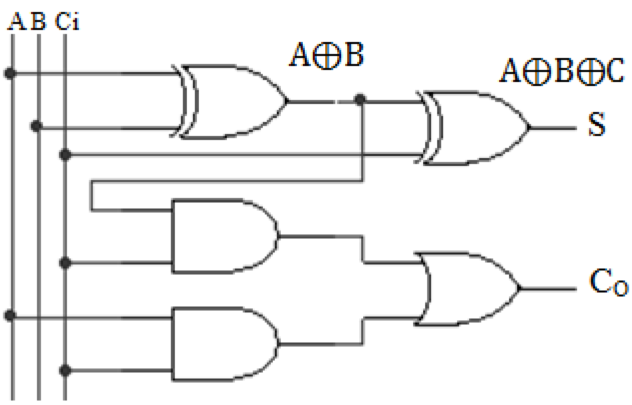
6. Diagrama de bloque de un sumador completo:



7. Otra forma.

$$
\begin{aligned}
Co &= \overline{A}BC_i + A\overline{B}C_i + AB\overline{C}C_i + ABC_i \\
&= C_i(\overline{A}B + AB) + AB(\overline{C}_i + C_i) \\
&= C_i(A \oplus B) + AB
\end{aligned}
$$

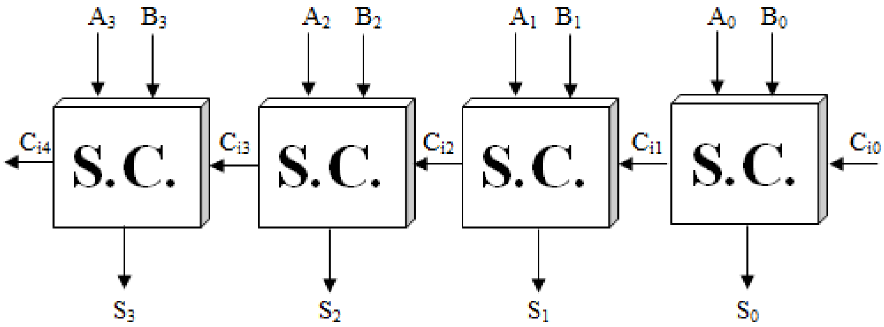
8. Logigrama.

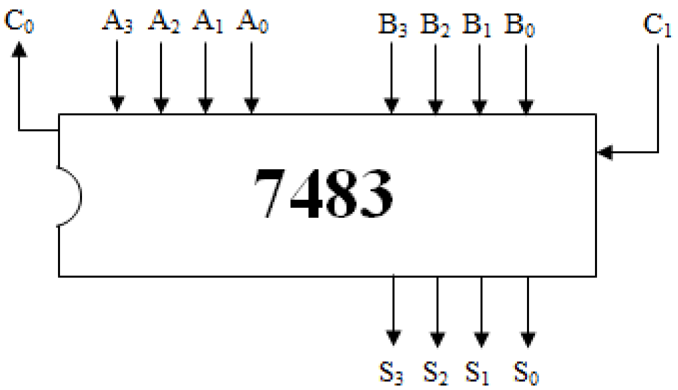


Notemos que de esta manera nos ahorramos una compuerta.

Ahora tenemos 3 niveles de conmutación para el acarreo y 2 para la suma.

SUMADOR COMPLETO DE CUATRO BITS





$$\begin{array}{cccc} C_{i3} & C_{i2} & C_{i1} & C_{i0} \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \\ \hline S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ 1101 \\ 1011 \\ \hline 11000 \end{array}$$

RESTA:

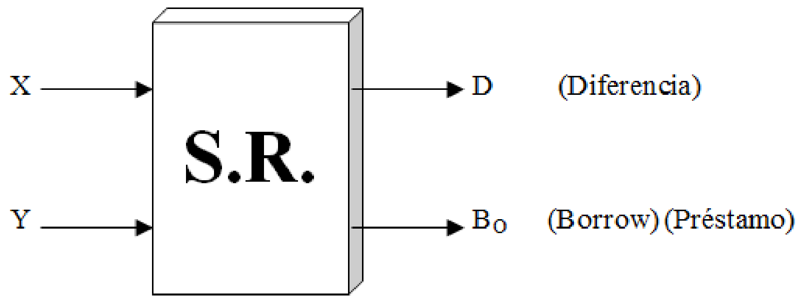
Se clasifican en:

a) Semi-Restador.
b) Restador Completo.

La sustracción de dos números binarios, pueden lograrse tomando el complemento del sustraendo, para agregarlo al minuendo. Mediante este método de operación de sustracción se convierte en operación de suma, que necesita sumadores completos, para su ejecución, en la máquina.

Semi-Restador

1. Diagrama a bloques.



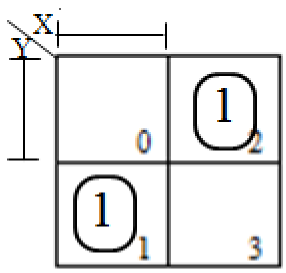
2. Tabla funcional.

Decimal	X	Y		D	B_0
0	0	0		0	0
1	0	1		1	1
2	1	0		1	0
3	1	1		0	0

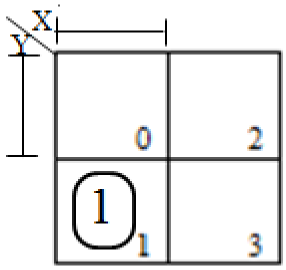
3. Función canónica.

$$D(X, Y) = \sum_m (1,2); \quad B(X, Y) = \sum_m (1)$$

4. Mapa de Karnaugh.

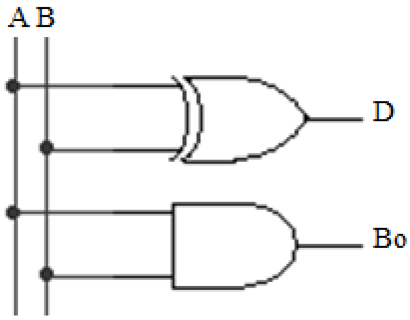


$$D = X\overline{Y} + \overline{X}Y = X \oplus Y$$



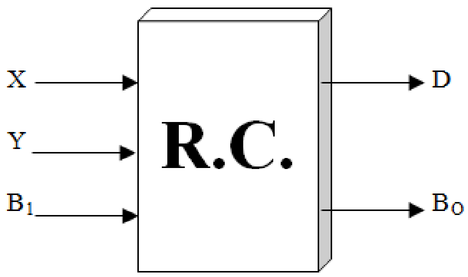
$Bo = \overline{X}Y$

5. Logigrama.



Restador Completo.

1. Diagrama a bloques.



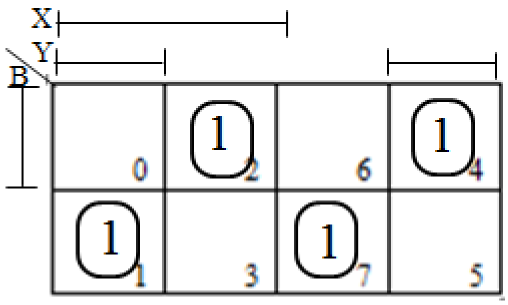
2. Tabla de verdad.

Decimal	**X**	**Y**	**B_1**		**D**	**B_0**
0	0	0	0		0	0
1	0	0	1		1	1
2	0	1	0		1	1
3	0	1	1		0	1
4	1	0	0		1	0
5	1	0	1		0	0
6	1	1	0		0	0
7	1	1	1		1	1

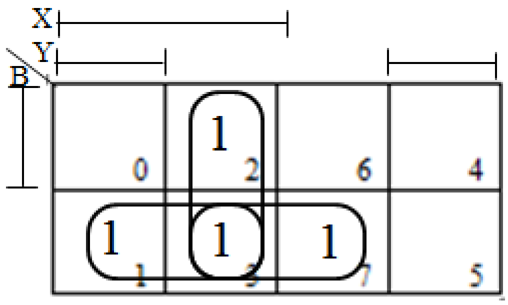
3. Funciones canónicas.

$D(X, Y, B_i) = \sum_m(1,2,4,7);\ B_O(X, Y, B_i) = \sum_m(1, 2, 3, 7)$

4. Mapa de Karnaugh.

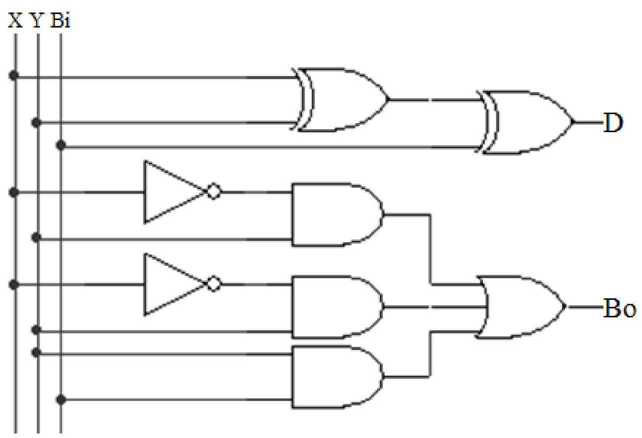


$D = X \oplus Y \oplus B_i$



$Bo = \overline{X}Y + \overline{X}B_i + YB_i$

5. Logigrama.



Ahora veamos si podemos con exclusividad llegar a encontrar para B_O algo parecido a C_O.

$Bo = \overline{A}\,\overline{B}B_i + \overline{A}B\overline{B}_i + \overline{A}BB_i + ABB_i$
$Bo = \overline{A}(\overline{B}B_i + B_i\overline{B}) + BB_i$
$Bo = \overline{A}(B \oplus B_i) + BB_i$

o también:

$$Bo = \bar{A}\,\bar{B}B_i + \bar{A}B\bar{B}_i + \bar{A}BB_i + ABB_i$$
$$Bo = B_i(\bar{A}\,\bar{B} + AB) + \bar{A}B$$
$$Bo = B_i(\overline{A \oplus B}) + \bar{A}B$$

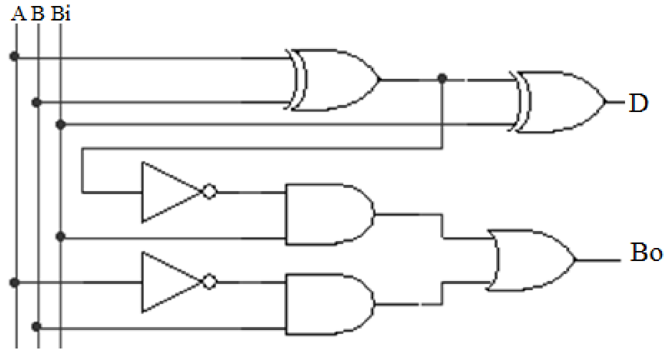
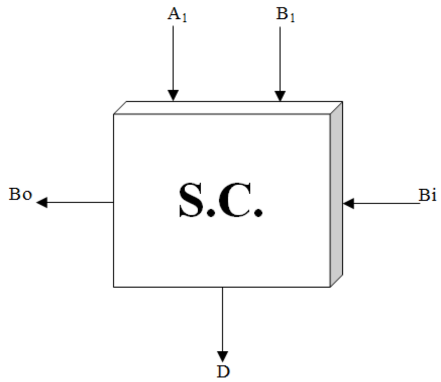


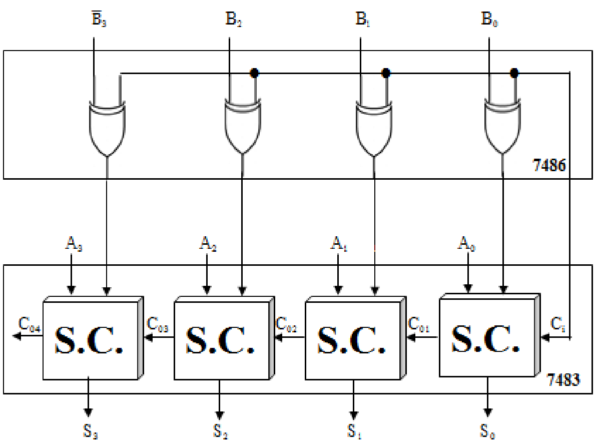
Diagrama a bloques.



Ejemplo:

Usando cuatro compuertas “O-Exclusivas” y un circuito de sumadores completos de cuatro bits, construya un sumador sustractor. Use una variable de selección de entrada “S” de tal manera que cuando S = 0, el circuito suma y cuando S = 1 el circuito resta.

Sugerencias: Use la sustracción por complemento a dos.



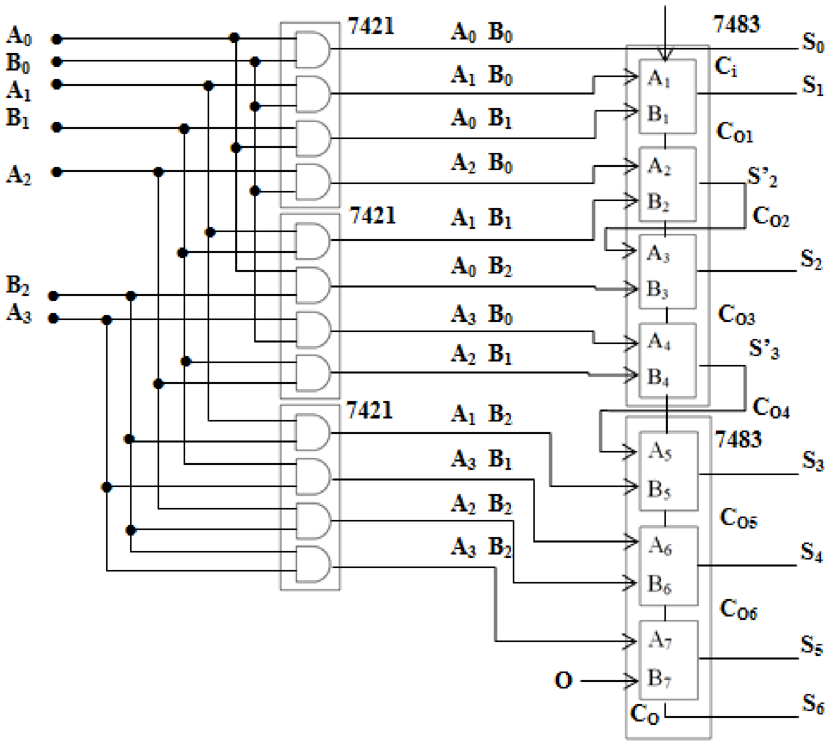
Ejemplo:

Diseñe un multiplicador binario, que multiplique un número binario de 4 bits, por un numero de 3 bits para formar el producto D. el circuito debe realizarse con compuertas “Y” y sumadores completos.

Ecuación 1= $A_3\ A_2\ A_1\ A_0$
Ecuación 2= $B_2\ B_1\ B_0$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
 & & & & B_2 & B_1 & B_0 \\
\hline
 & & & A_3 B_0 & A_2 B_0 & A_1 B_0 & A_0 B_0 \\
 & & A_3 B_1 & A_2 B_1 & A_1 B_1 & A_0 B_1 & \\
 & A_3 B_2 & A_2 B_2 & A_1 B_2 & A_0 B_2 & & \\
\hline
S_6 & S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & S_0
\end{array}
$$

$S_0 = A_0 B_0$
$S_1 = A_1 B_0 + A_0 B_1$
$S_2 = A_2 B_0 + A_1 B_1 + A_0 A_2$
$S_3 = A_3 B_0 + A_2 B_1 + A_1 B_2$
$S_4 = A_3 B_1 + A_2 B_2$
$S_5 = A_3 B_2$
$S_6 = C$



Multiplexores

Implemente la siguiente función con un multiplexor:

F(A, B, C, D) = Σ (0, 1, 3, 4, 8, 9, 15)

Para resolver este problema necesitamos realizar los siguientes pasos:

Expresar la función en su forma de suma de Minitérminos.
Si la secuencia ordenada de n variables es A, B, C, D,….., etc. donde A es la variable más a la izquierda en la secuencia ordenada de las n variables y B, C, D,….., etc. son las n-1 remanentes. Se conectan las n-1 variables a las líneas de selección del multiplexor, con B conectada a la línea de selección de orden más alto, C a la siguiente línea de selección más baja y así sucesivamente.

Considere la variable A, la cual se complementará en Minitérminos O a $(2^n/2) - 1$. Los cuales comprenden la primera mitad en la lista de Minitérminos. La segunda mitad de los Minitérminos tendrá su variable A sin complementar.

Para hacer lo anterior se listan las entradas del multiplexor y bajo ellas se listan todos los Minitérminos en dos renglones.

En el primer renglón los Minitérminos con A sin complementar. Se encierran dentro de un circulo todos los Minitérminos de la función y se inspecciona por separado cada columna.

Si los dos Minitérminos en una columna no están dentro del círculo, aplíquese “0” a la entrada correspondiente del multiplexor.

Si los dos Minitérminos están dentro de un circulo, se aplica”1” a la entrada correspondiente del multiplexor.

Si el Minitérmino inferior está dentro de un circulo y el superior no lo esta se aplica A, a la entrada correspondiente del multiplexor. De esta forma la solución al problema es:

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	1	0	Ā	Ā	0	0	A

Método de paridad para la detección de errores

Bit de paridad: Un bit de paridad es un bit extra que se agrega a un grupo de código que se transfiere de un lugar a otro. El bit de paridad es un 0 o un 1, según el número de unos que haya en el grupo del código.

En la paridad par, el valor del bit de paridad se escoge de manera que el número total de unos que hay en el grupo de código (incluso el bit de paridad) sea un número par.

Ejemplo:

El grupo del código tiene 3 unos. Por lo tanto, sumaremos un bit de paridad con valor 1 para hace que el número total de unos sea un número par. Por lo tanto el nuevo grupo de código con un bit de paridad es:

$$\boxed{1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

Bit de paridad agregado

Si el grupo de código es 1000001. Cuál es el código con bit de paridad. El nuevo código con bit de paridad, seria 01000001.

En la paridad impar se realiza lo mismo que en la paridad par pero el número total de unos incluyendo el bit de paridad asignado seria 1.

Problemas resueltos

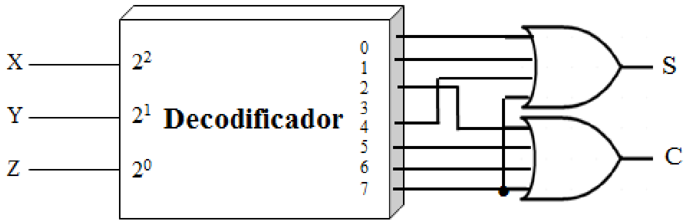
Problema 1:

Implemente un circuito adicionador completo con un decodificador y dos compuertas O (OR).

S (X, Y, Z) = Σ (1, 2, 4, 7)
C (X, Y, Z) = Σ (3, 5, 6, 7)

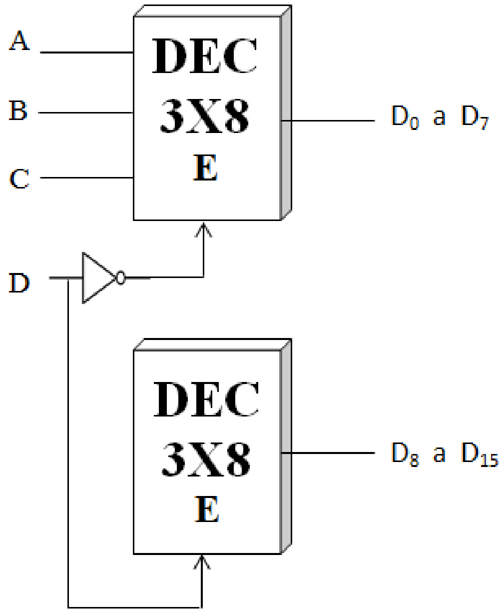
Un decodificador proporciona 2^n Minitérminos de "variables de entrada. Ya que cualquier función booleana es posible expresarla en la forma canónica de suma de Minitérminos, puede emplearse un decodificador para generar los Minitérminos y una compuerta externa O (OR) para formar la suma. Así, cualquier circuito combinacional con "n" entradas y "m" salidas, puede implementarse con un decodificador de "n" a 2^n y "m" compuertas O (OR).

Ya que hay tres entradas y un total de ocho Minitérminos, necesita un decodificador de 3 a 8 líneas.



Construya un decodificador 4x16 con dos decodificadores 4x8.

Solución:



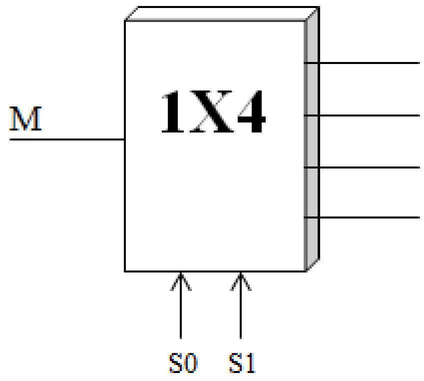
Problema 2:

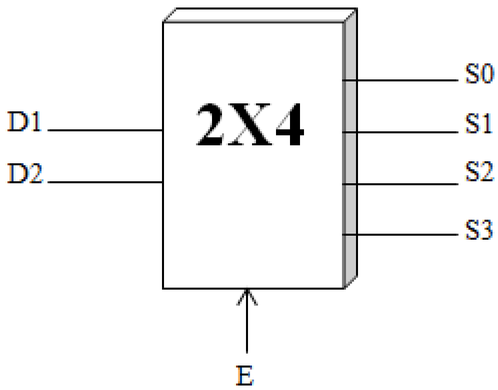
Diseñe un sumador completo de dos bits con multiplexores.

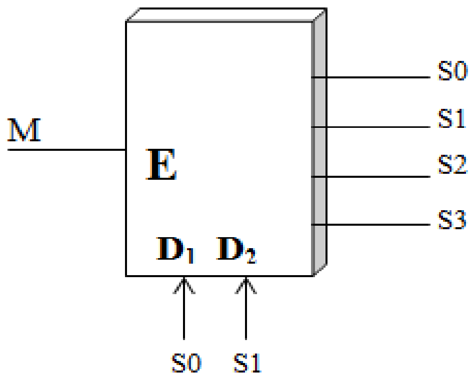
Solución:

(A+B) = Σ (1, 2, 4, 7)
Co = Σ (3, 5, 6, 7)

DEC.	**A**	**B**	**C_1**		**(A+B)**	**C_0**
0	0	0	0		0	0
1	0	0	1		1	0
2	0	1	0		1	0
3	0	1	1		0	1
4	1	0	0		1	0
5	1	0	1		0	1
6	1	1	0		0	1
7	1	1	1		1	1





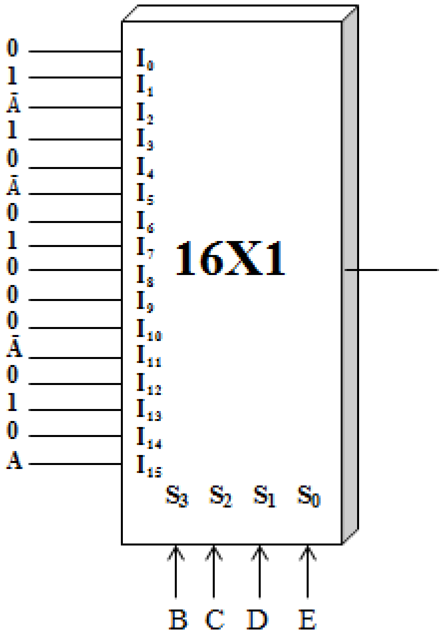


Problema 3:

Un número binario de 5 bits Z = ABCDE aparece en la entrada de un circuito lógico combinacional cuya salida es 1 cuando el número Z es primo. Diseñe el circuito empleando un multiplexor.

$F = \Sigma\,(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)$

Solución:



	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	0	1	Ā	1	0	Ā	1	0	0	0	Ā	0	Ā	1	0	A

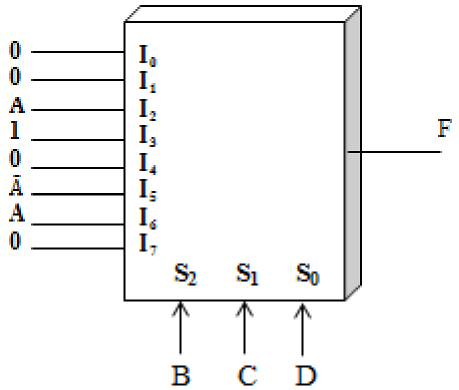
Problema 4:

Por medio de un multiplexor genere una función que responda con "1" si un sensor como el de la figura, detecta alguno de los siguientes elementos:

$F = \Sigma\ (3, 5, 10, 11, 14)$

Solución:

A	B	C	D		F
0	0	0	0		0
0	0	0	1		0
0	0	1	0		0
0	0	1	1		1
0	1	0	0		0
0	1	0	1		1
0	1	1	0		0
0	1	1	1		0
1	0	0	0		0
1	0	0	1		0
1	0	1	0		1
1	0	1	1		1
1	1	0	0		0
1	1	0	1		0
1	1	1	0		1
1	1	1	1		0



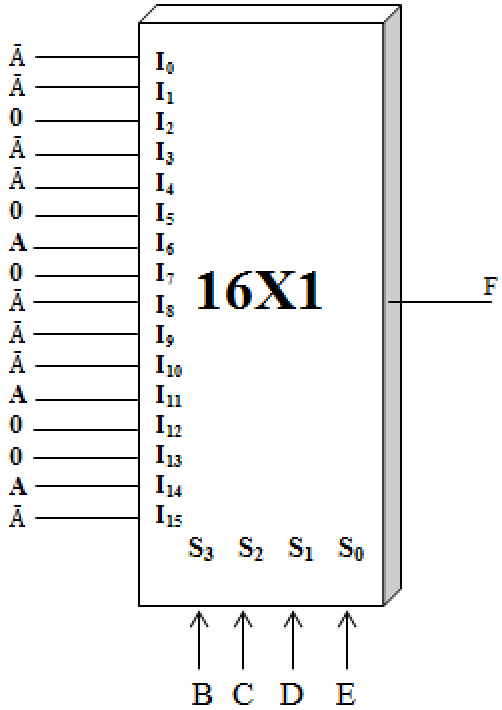
	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	9	10	11	12	13	14	15
	0	0	A	1	0	Ā	A	0

Problema 5:

Empleando un multiplexor, diseñe un circuito que realice la siguiente función:

$F = \Sigma\,(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)$

Solución:



	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	Ā	Ā	0	Ā	Ā	0	A	0	Ā	Ā	Ā	A	0	0	A	Ā

Problema 6:

Un número binario de 5 bits N = $X_4\ X_3\ X_2\ X_1\ X_0$ aparece en las entradas de un circuito lógico combinacional, el cual cuenta con 2 salidas:

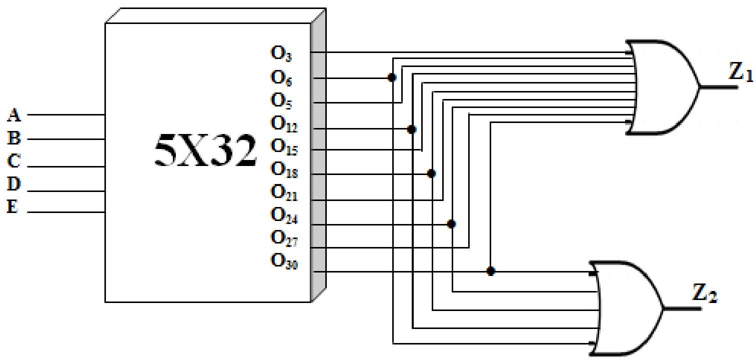
Z_1 = Indica que N es exactamente divisible entre 3.
Z_2 = Indica que N es exactamente divisible entre 6.

Diseñe una relación de suma de productos utilizando:

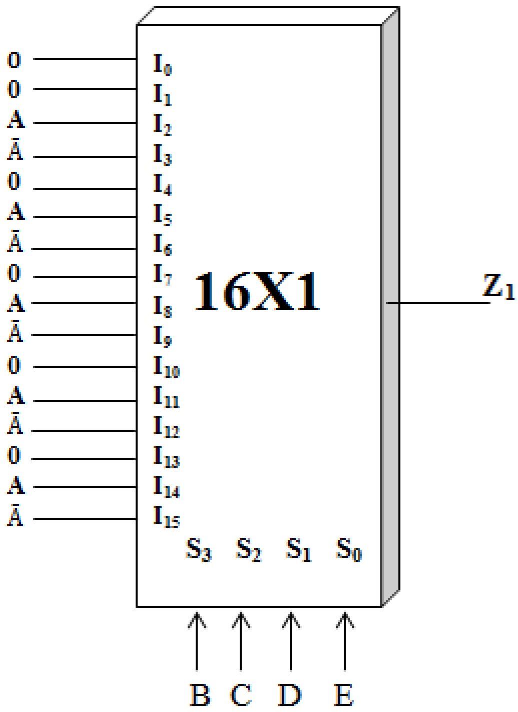
a) Un decodificador y compuertas O (OR).
b) Dos multiplexores, uno para cada salida.

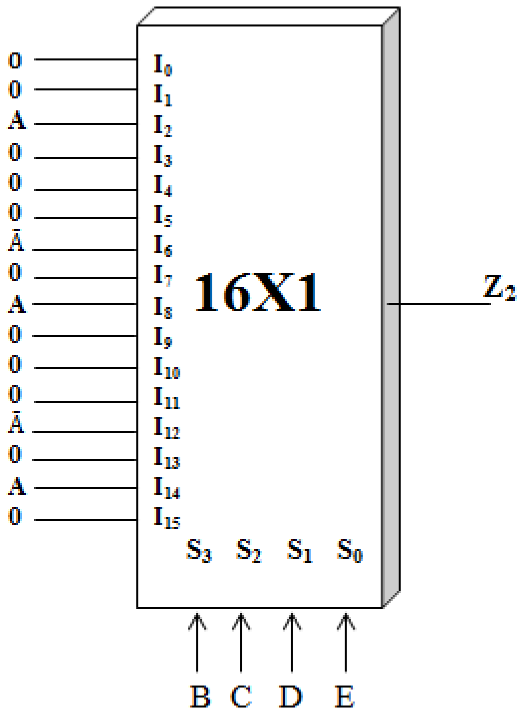
Solución:

$Z_1 = \Sigma\ (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30)$
$Z_2 = \Sigma\ (6, 12, 18, 24, 30)$



	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	0	0	A	Ā	0	A	Ā	0	A	Ā	0	A	Ā	0	A	Ā
	0	0	A	0	0	0	Ā	0	A	0	0	0	Ā	0	A	0

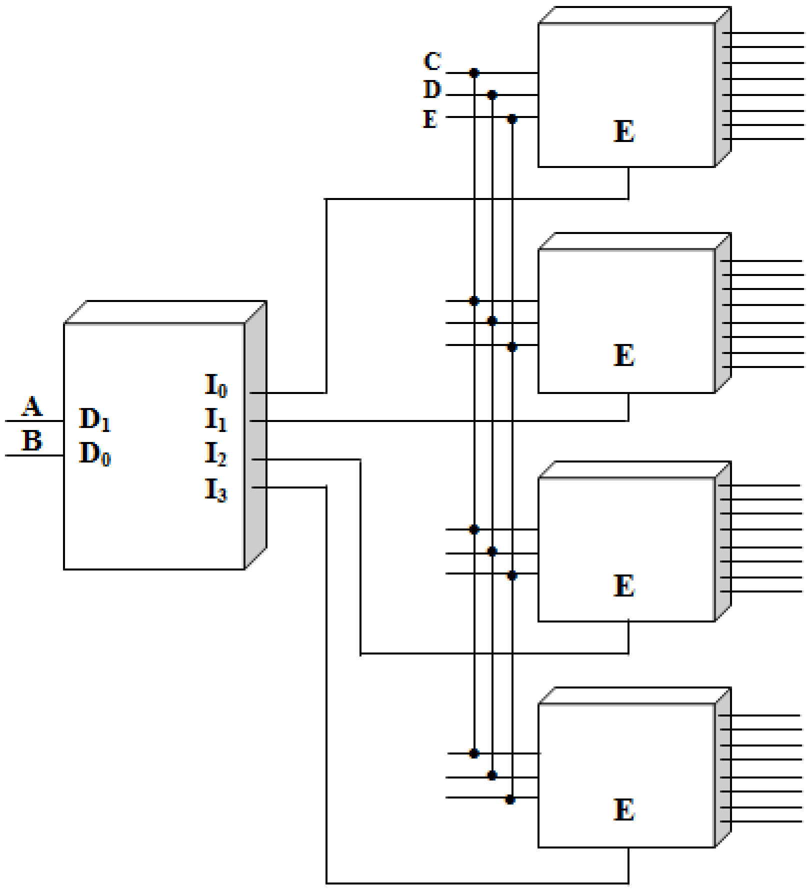




Problema 7:

Construya un decodificador de 5X32 con 4 decodificadores demultiplexores de 3X8, y un decodificador de 2x4.

Solución:



Problema 8:

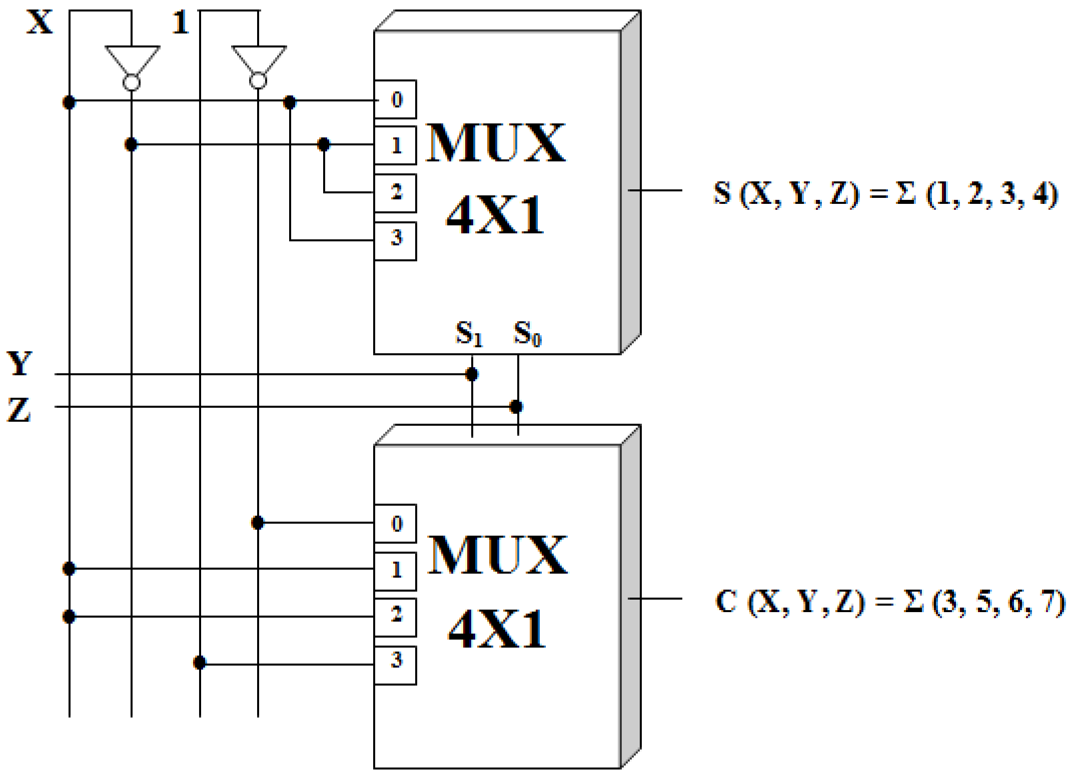
Implemente un sumador completo por medio de multiplexores.

Solución:

DEC.	X	Y	Z	S	C
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

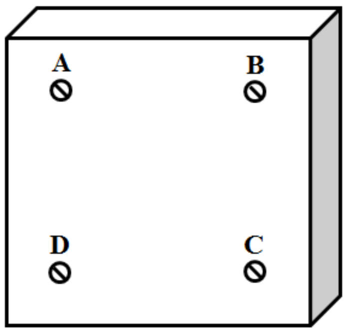
S	I_0	I_1	I_2	I_3
$\overline{X}$	$_{0}$	$1\ _{1}$	$1\ _{2}$	$_{3}$
X	$1\ _{4}$	$_{5}$	$_{6}$	$1\ _{7}$
	X	$\overline{X}$	$\overline{X}$	X

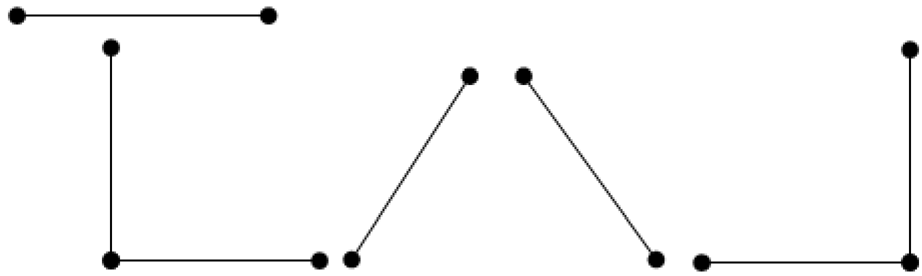
C	I_0	I_1	I_2	I_3
$\overline{X}$	$_{0}$	$_{1}$	$_{2}$	$1\ _{3}$
X	$_{4}$	$1\ _{5}$	$1\ _{6}$	$1\ _{7}$
	0	X	X	1



Problema 9:

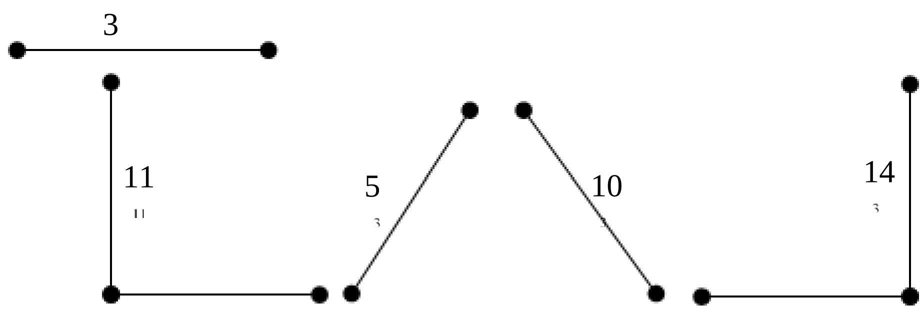
Por medio de un multiplexor genere una función que responda con "1", si un sensor como el de la figura detecta alguno de los siguientes elementos:





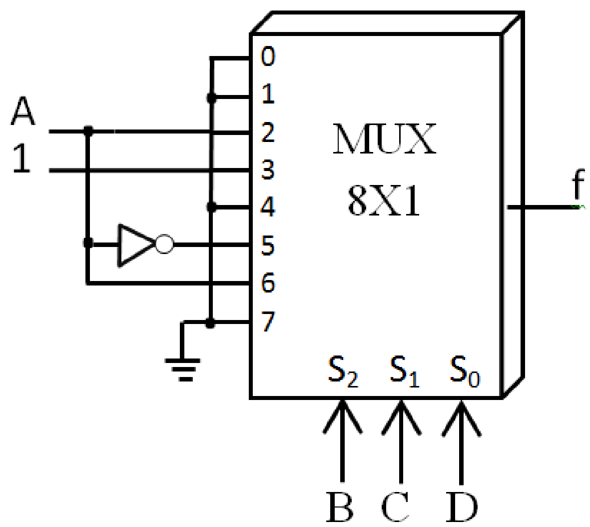
Y que responda cero en cualquier otro caso.

Solución:



f (A, B, C, D)= Σ (3, 5, 10, 11, 14)

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Ā	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	9	10	11	12	13	14	15
	0	0	A	1	0	Ā	A	0



Problema 10:

Usando un multiplexor diseñe un circuito que detecte los siete primeros números de la secuencia de Fibonacci.

Esta secuencia se define recursivamente:

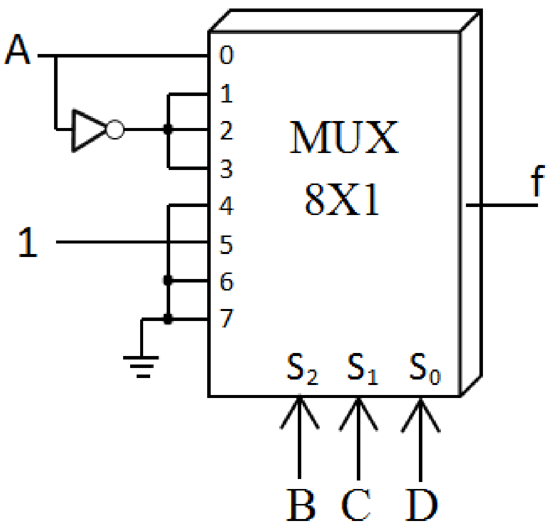
F (1) = F (2) = 1
Y
F (n) = f (n-1) + f (n-2), para n>2

Solución:

F (1) = 1
F (2) = 1
F (3) = F (2) + F (1) = 2
F (4) = F (3) + F (2) = 3
F (5) = F (4) + F (3) = 4
F (6) = F (5) + F (4) = 8
F (7) = F (6) + F (5) = 13

f = Σ (1, 2, 3, 5, 8, 13)

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
$\bar{A}$	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	9	10	11	12	13	14	15
	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$	0	1	0	0



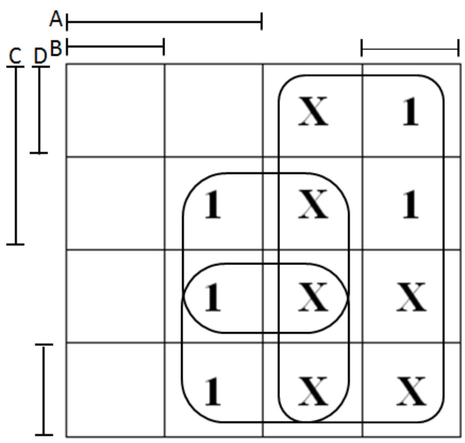
Problema 11:

Realizar la conversión de código BCD a código 8+4-2-1:

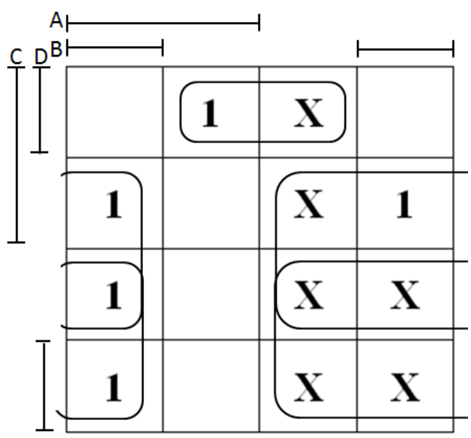
Solución:

Dec.	**BCD**	**+8**	**+4**	**-2**	**-1**
0	0000	0	0	0	0
1	0001	0	1	1	1
2	0010	0	1	1	0
3	0011	0	1	0	1
4	0100	0	1	0	0
5	0101	1	0	1	1
6	0110	1	0	1	0
7	0111	1	0	0	1
8	1000	1	0	0	0
9	1001	1	1	1	1
10	XXXX	X	X	X	X
11	XXXX	X	X	X	X
12	XXXX	X	X	X	X
13	XXXX	X	X	X	X
14	XXXX	X	X	X	X
15	XXXX	X	X	X	X

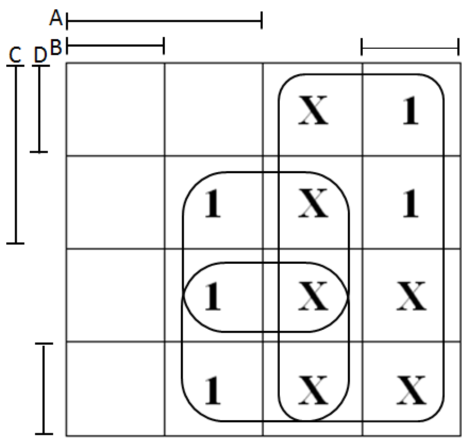
$S_1(A,B,C,D) = \sum(5,6,7,8,9)$
$S_2(A,B,C,D) = \sum(1,2,3,4,9)$
$S_3(A,B,C,D) = \sum(1,2,5,6,9)$
$S_4(A,B,C,D) = \sum(1,3,5,7,9)$



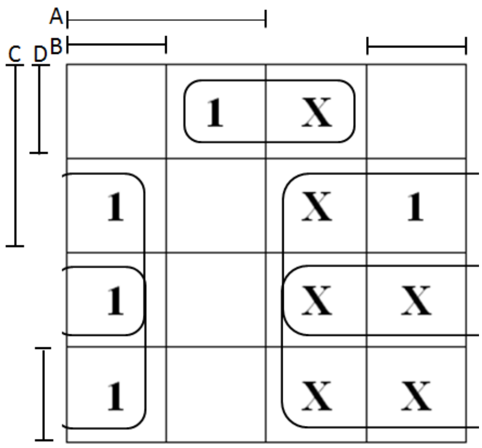
Para S_1



Para S_2



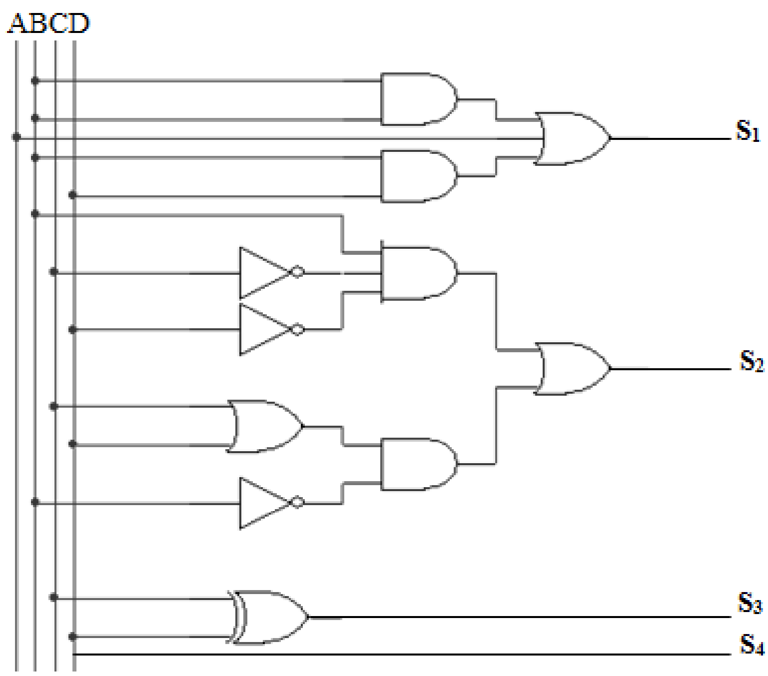
Para S_1



Para S_2

$S1 = A + BC + BD$
$S2 = \overline{B}D + \overline{B}C + B\overline{C}\overline{D}$
$S2 = \overline{B}(D + C) + B\overline{C}\overline{D}$
$S3 = \overline{C}D + C\overline{D}$
$S3 = C \oplus D$
$S4 = D$

A continuación se muestra el logigrama del conversor BCD a +8+4-2-1



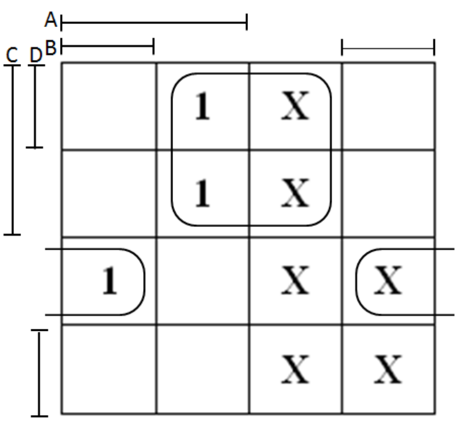
Problema 12:

Obtenga el logigrama lógico mínimo del conversor de código de Exceso 3 (BCD) a un código BCD cuyas combinaciones 0, 1, 2, 3, 4 están excedidas en 2 y las restantes están disminuidas en 9.

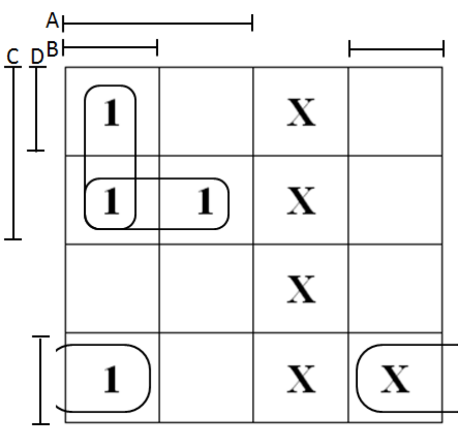
Solución:

Deci.	**BCD**	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**Y_4**
0	0000	0	1	0	1
1	0001	0	1	1	0
2	0010	0	1	1	1
3	0011	1	0	0	0
4	0100	1	0	0	1
5	0101	1	1	0	0
6	0110	0	0	0	0
7	0111	0	0	0	1
8	1000	0	0	1	0
9	1001	0	0	1	1
10	XXXX	X	X	X	X
11	XXXX	X	X	X	X
12	XXXX	X	X	X	X
13	XXXX	X	X	X	X
14	XXXX	X	X	X	X
15	XXXX	X	X	X	X

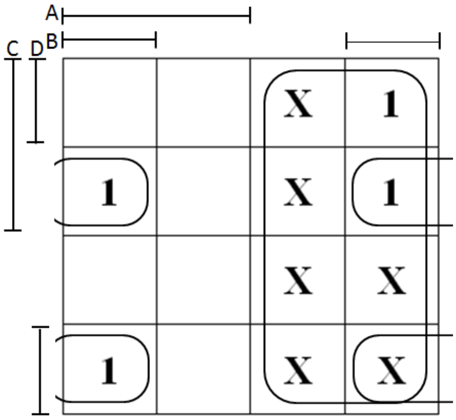
$Y_1(A, B, C, D) = \sum(3, 4, 5)$
$Y_2(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 5)$
$Y_3(A, B, C, D) = \sum(1, 2, 8, 9)$
$Y_4(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 7, 9)$



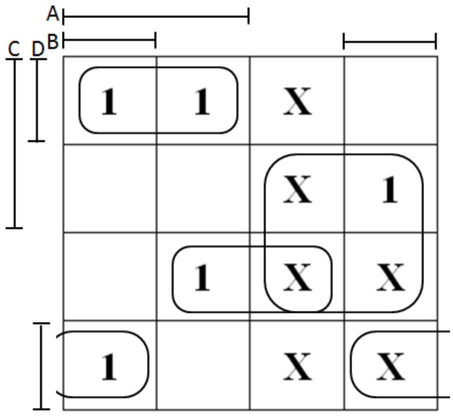
Para Y_1



Para Y_2



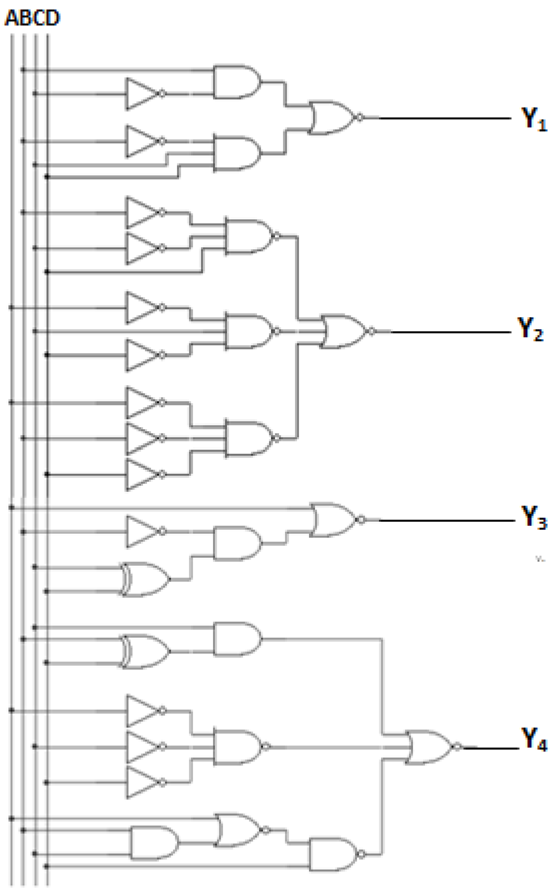
Para Y_3



Para Y_4

$Y_1 = B\bar{C} + \bar{B}CD$
$Y_2 = \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
$Y_3 = A + \bar{B}\bar{C}D + \bar{B}C\bar{D}$
$Y_4 = \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + AD + BCD$

Logigrama de las funciones anteriores:



Problema 13:

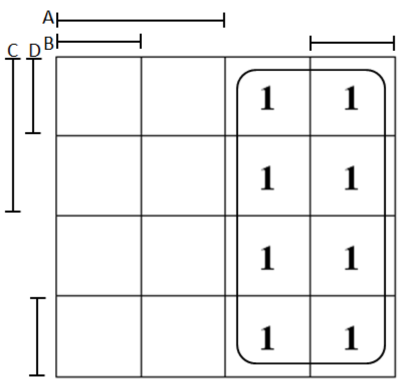
Realice un circuito de código Gray a código Binario para 4 bits, de tal manera que se utilicen compuertas O-Exclusiva (o XOR).

Solución:

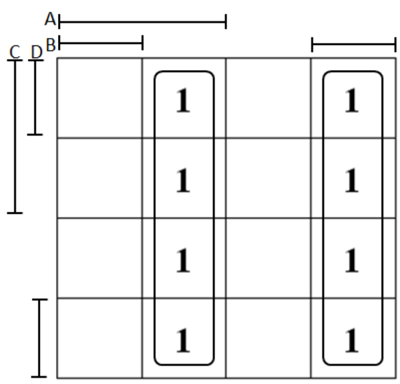
Deci.	**A**	**B**	**C**	**D**	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_4}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	1	0	0	1	1
6	0	1	0	0	0	1	0	0
7	0	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	1	0	0	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1	1	1
12	1	0	0	0	1	0	0	0
13	1	0	0	1	1	0	0	1
15	1	0	1	0	1	0	1	0
14	1	0	1	1	1	0	1	1
10	1	1	0	0	1	1	0	0
11	1	1	0	1	1	1	0	1
9	1	1	1	0	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1

$F_1(A, B, C, D) = \sum(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$
$F_2(A, B, C, D) = \sum(6, 7, 8, 9, 10, 11, 5, 4)$
$F_3(A, B, C, D) = \sum(2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 15)$
$F_4(A, B, C, D) = \sum(1, 2, 4, 7, 13, 14, 11, 8)$

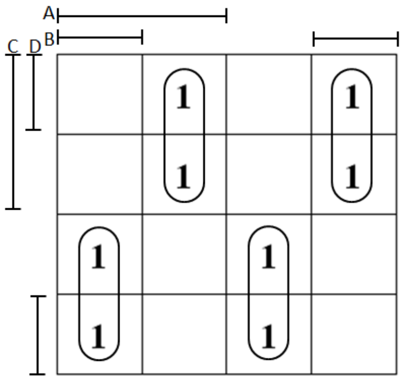
Con las funciones anteriores llenaremos los mapas de Karnaugh correspondientes.



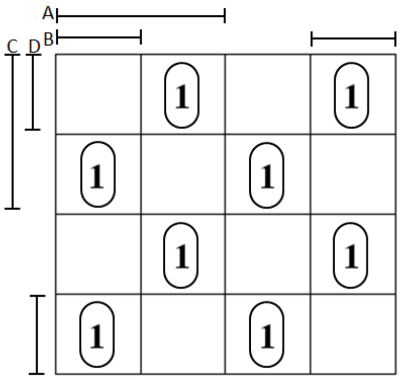
Para: F_1



Para: F_2



Para: F_3



Para: F_4

De los mapas se obtiene:

$$F_1 = A$$
$$F_2 = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$
$$F_3 = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$
$$= \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(\overline{B}\,\overline{C} + BC)$$
$$= \overline{A}(B \oplus C) + A(A \oplus B)$$
$$= A \oplus B \oplus C$$
$$F_4 = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

Problema 14:

Construir la tabla de funciones de salida f_1, f_2, f_3, f_4, para un circuito que convierte señales de entrada en el código 8, 4, -2, -1 a señales en el código Gray. Minimizar f_1 mediante mapas de Karnaugh haciendo uso de condiciones irrelevantes. Implementar f_1 en dos etapas por medio de compuertas NO-O (NOR).

Solución:

Código 8 4-2-1	**Estado**	**Digito**	**Código Gray f_1 f_2 f_3 f_4**
0000	0	0	0000
0111	7	1	0001
0110	6	2	0011
0101	5	3	0010
0100	4	4	0110
1011	11	5	0111
1010	10	6	0101
1001	9	7	0100
1000	8	8	1100
1111	15	9	1101

Si los estados [1], [2], [3], [12], [13], [14] se presentan a la entrada, a la salida hay error y se presenta por 1111. Por lo tanto las condiciones irrelevantes son: 1, 2, 3, 12, 13, 14.

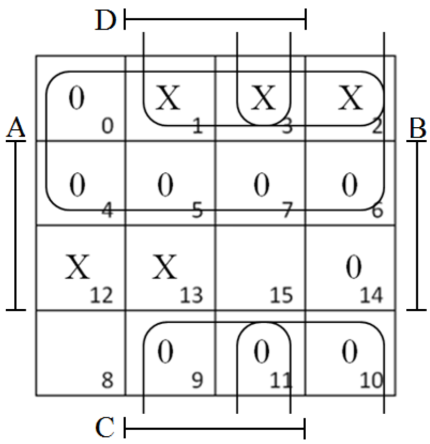
Las funciones quedan:

$f_1 = \Sigma(8, 15)$
$f_2 = \Sigma(4, 11, 10, 9, 8, 15)$
$f_3 = \Sigma(6, 5, 4, 11)$
$f_4 = \Sigma(6, 7, 10, 11, 15)$

Recuerde que para implementar un circuito combinatorio con compuertas NO-O (NOR), tenemos que utilizar la forma π, esto es:

$f_1 = \Sigma(8, 15) = \pi(0, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11)$

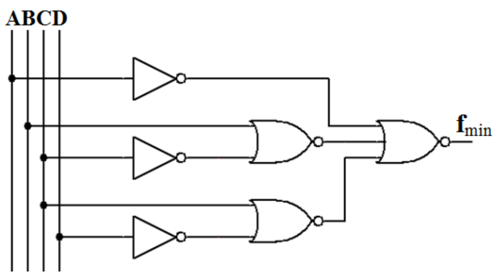
Pasando a un mapa de Karnaugh queda de la siguiente forma:



$f_{min} = a(b + \bar{c})(c + \bar{d})$

$f_{min} = [\overline{\overline{a(b + \bar{c})(c + \bar{d})}}]$

$f_{min} = [\overline{\bar{a} + (\overline{b + \bar{c}}) + (\overline{c + \bar{d}})}]$



Problemas propuestos

Problema 1:

Diseñar circuitos lógicos combinatorios cuyas entradas sean código BCD y cuyas salidas detecten:

1. Dígitos de entrada divisibles entre 2.
2. Números mayores o iguales a 6.
3. Números menores que 7.

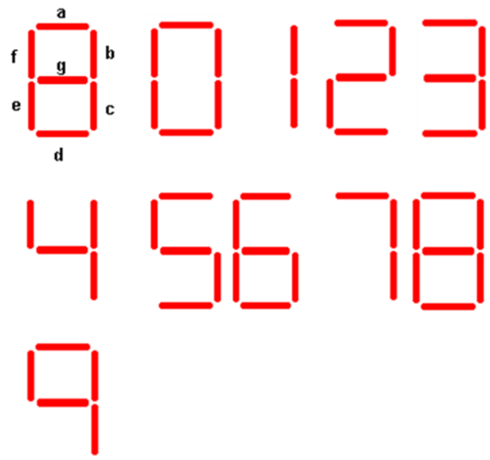
Implementar con compuertas NO-Y (NAND).

Problema 2:

Desarrollar un circuito lógico combinatorio que convierta números binarios de 4 bits en su forma correspondiente de complemento a 1.

Problema 3:

Diseñar un decodificador BCD a 7 segmentos que sea capaz de aceptar información decimal expresada en BCD y de generar salidas que seleccionen segmentos, para visualizar el digito apropiado, ver la siguiente figura:



Problema 4:

Diseñar un circuito lógico combinatorio que genere el cuadro de todas las combinaciones de un número binario de 3 bits A_2, A_1, A_0:

Problema 5:

Diseñar un circuito lógico combinatorio que genere el complemento a 9 de cada uno de los dígitos decimales expresados en BCD.

Problema 6:

Una casa habitación tiene 4 cuartos, y debe organizarse de manera que las luces de cada cuarto puedan apagarse y encenderse desde cualquier habitación.

Problema 7:

Un código binario de 3 bits se va a transmitir sobre una línea a un receptor y, para proteger el código de errores, se añade un bit extra llamado bit de paridad, cuando sea necesario, en el extremo emisor de la línea. Desarrollar un circuito en el extremo receptor de línea para comprobar la paridad de cada una de las combinaciones del código.

Problema 8:

Desarrollar el código Gray correspondiente al código 2-4-2-1.

Problema 9:

Diseñar un multiplicador binario que multiplique un número B de cuatro bits $B=b_3\ b_2\ b_1\ b_0$ por un número de 4 bits $A = a_3\ a_2\ a_1\ a_0$. Implemente usando compuertas Y (AND) y sumadores completos.

Problema 10:

Los números positivos y negativos se representan mediante palabras de 8 bits en una maquina digital que realice sus operaciones aritméticas usando el sistema de complemento a 2. ¿Cómo aparecerán los números 19 y -10 en los registros de la maquina?

Problema 11:

Obtenga el diagrama lógico NO-Y (NAND) de un adicionador completo mediante las funciones booleanas:

$C = XY + XZ + YZ$
$S = (X + Y + Z) + XYZ$

Problema 12:

Diseñe un circuito combinacional que convierta un número de 4 bits en código reflejado en un número binario de 4 bits.

Implemente con compuertas O-Exclusiva.

Problema 13:

Diseñe un convertidor de código Exceso 2 a BCD, usando un circuito MSI de sumadores completos de 4 bits.

Problema 14:

Emplee compuertas O-Exclusivas y un sumador completo de 4 bits para hacer un restador paralelo de 4 bits. Use la variable V para indicar con “0” que el circuito suma y con “1” que el circuito resta.

¿Cuántas entradas No-Importa hay en el sumador BCD?

Problema 15:

Diseñar una unidad aritmética para dos dígitos BCD (A y B) y dos variables de selección X_1 y X_0. La cual puede hacer operaciones como lo indica la tabla:

V_1	V_0	Función de salida
0	0	A+1
0	1	A+10 Complemente de B
1	0	A+9 Complemente de B
1	1	A+B

Problema 16:

Diseñe empleando un decodificador y compuertas externas.

Problema 17:

Construya un decodificador 5x32 con cuatro decodificadores / demultiplexores de 3x8 y un decodificador 2x4.

Problema 18:

$F_1(X, Y) = \Sigma(0, 3)$
$F_2(X, Y) = \Sigma(1, 2, 3)$

Problema 19:

Obtenga un multiplexor de 8x1 con un multiplexor dual 4 líneas a 1 línea teniendo entradas de habilitación separadas pero líneas comunes de selección.

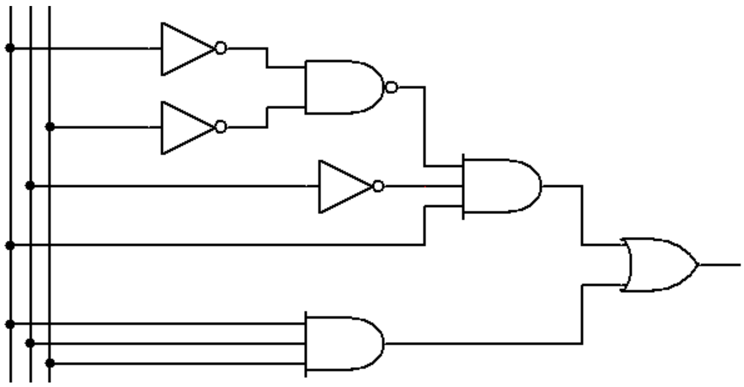
Problema 4:

Compruebe la equivalencia de las siguientes funciones:

$$A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} = \overline{B} + \overline{A}C$$

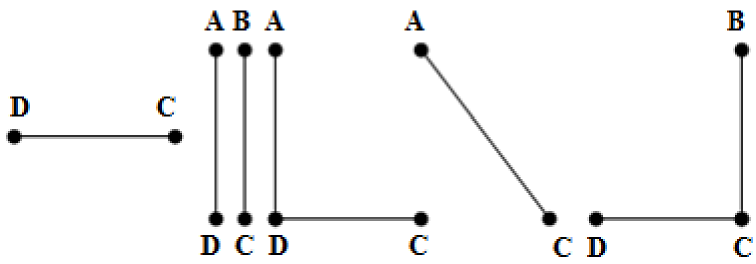
Problema 11:

Simplifique al máximo el circuito de la figura:



Problema 19:

Textura es la organización de una superficie como un conjunto de elementos repetidos. En un proceso automático para clasificar texturas artificiales, un sensor de 4 puntos (como el mostrado en la figura 2) envía señales a un circuito combinatorio cuya tarea es discriminar (emitiendo pulsos [1]) los siguientes elementos:



En todos los casos que inspecciona el sensor se activan al menos dos puntos de la rejilla (por consiguiente, no se presentan casos en los cuales se activa tan solo un punto, ni casos en los que no se activa ningún punto).

Minimizar la función booleana F(A, B, C, D) a la salida del circuito discriminador haciendo uso de condiciones irrelevantes (o No-Importa). Realizar el circuito mediante inversores y compuertas NO-Y(o NAND).

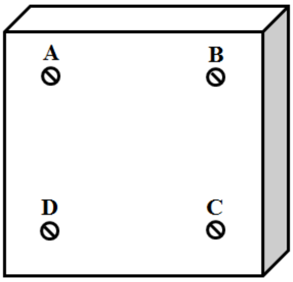
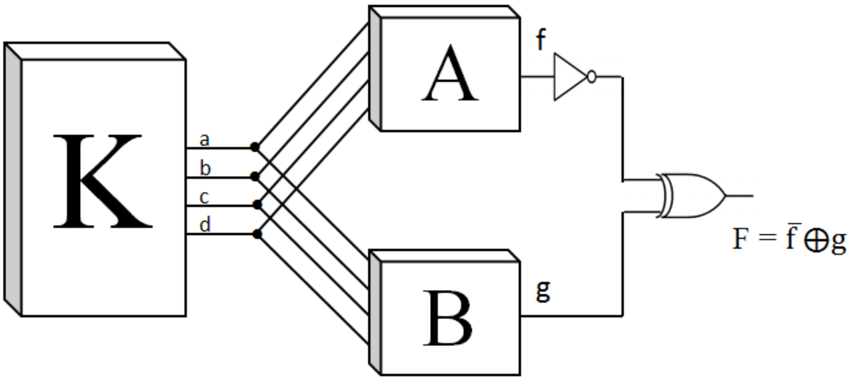


Figura 2. Sensor de cuatro puntos

Problema 24:

Minimizar la función $F = \bar{f} \oplus g$ de la salida del circuito combinatorio de la figura 4. El dispositivo A tiene por salida la función $f = (a + b)(a + d)(\bar{b} + c)$, en tanto que el dispositivo B tiene como salida $g = a\bar{b} + a\bar{c}$

El dispositivo K alimenta A y B enviando todas las señales lógicamente posibles excepto 1100 y 1101. Haga uso de las condiciones irrelevantes. Implemente la función mínima mediante compuertas NO-Y (o NAND).



Ejemplo:

Diseñe un multiplicador binario, que multiplique un número binario de 4 bits, por un numero de 3 bits para formar el producto D. el circuito debe realizarse con compuertas "Y" y sumadores completos.

Ecuación 1= $A_3\ A_2\ A_1\ A_0$
Ecuación 2= $B_2\ B_1\ B_0$

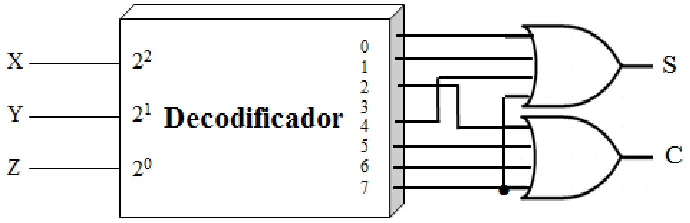
Problema 1:

Implemente un circuito adicionador completo con un decodificador y dos compuertas O (OR).

S (X, Y, Z) = Σ (1, 2, 4, 7)
C (X, Y, Z) = Σ (3, 5, 6, 7)

Un decodificador proporciona 2^n Minitérminos de "variables de entrada. Ya que cualquier función booleana es posible expresarla en la forma canónica de suma de Minitérminos, puede emplearse un decodificador para generar los Minitérminos y una compuerta externa O (OR) para formar la suma. Así, cualquier circuito combinacional con "n" entradas y "m" salidas, puede implementarse con un decodificador de "n" a 2^n y "m" compuertas O (OR).

Ya que hay tres entradas y un total de ocho Minitérminos, necesita un decodificador de 3 a 8 líneas.



Problema 6:

Un número binario de 5 bits N = X_4 X_3 X_2 X_1 X_0 aparece en las entradas de un circuito lógico combinacional, el cual cuenta con 2 salidas:

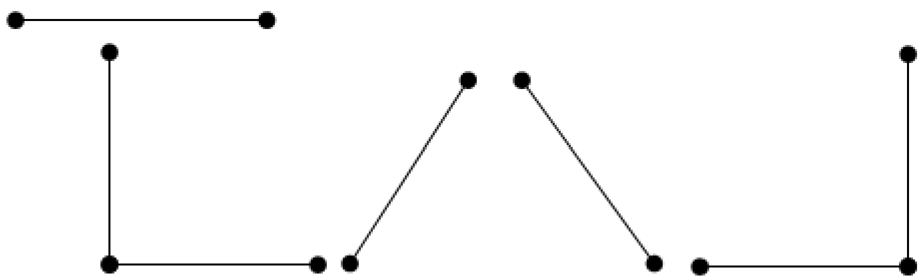
Z_1 = Indica que N es exactamente divisible entre 3.
Z_2 = Indica que N es exactamente divisible entre 6.

Diseñe una relación de suma de productos utilizando:

a) Un decodificador y compuertas O (OR).
b) Dos multiplexores, uno para cada salida.

Problema 9:

Por medio de un multiplexor genere una función que responda con "1", si un sensor como el de la figura detecta alguno de los siguientes elementos:



Y que responda cero en cualquier otro caso.

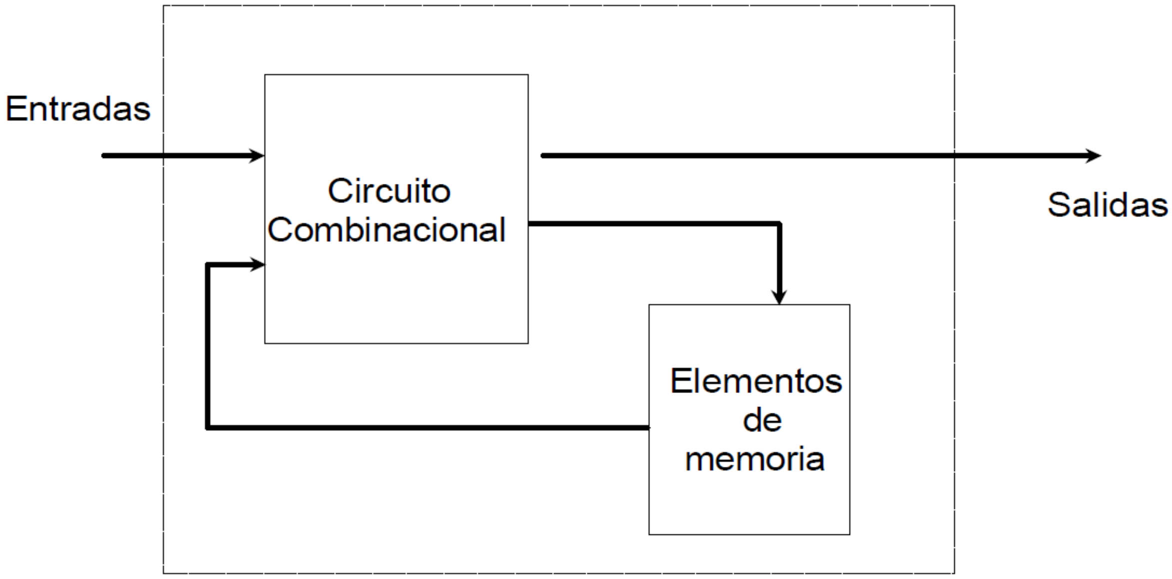
Problema 10:

Usando un multiplexor diseñe un circuito que detecte los siete primeros números de la secuencia de Fibonacci.
Esta secuencia se define recursivamente:

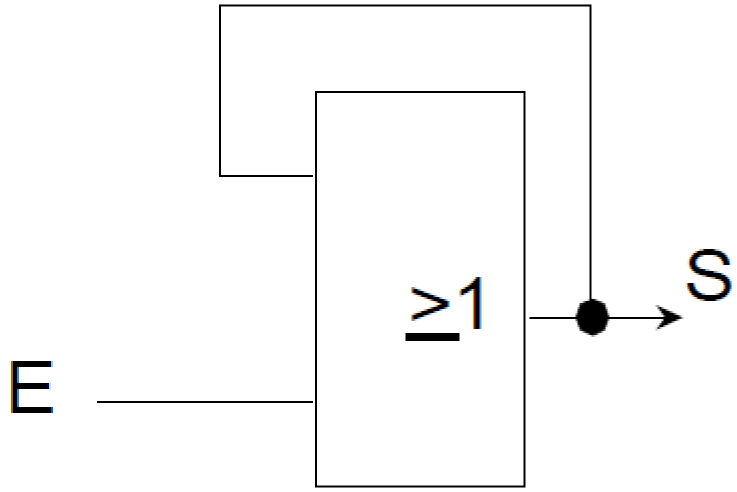
$F(1) = F(2) = 1$
Y
$F(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para $n>2$

Secuenciales

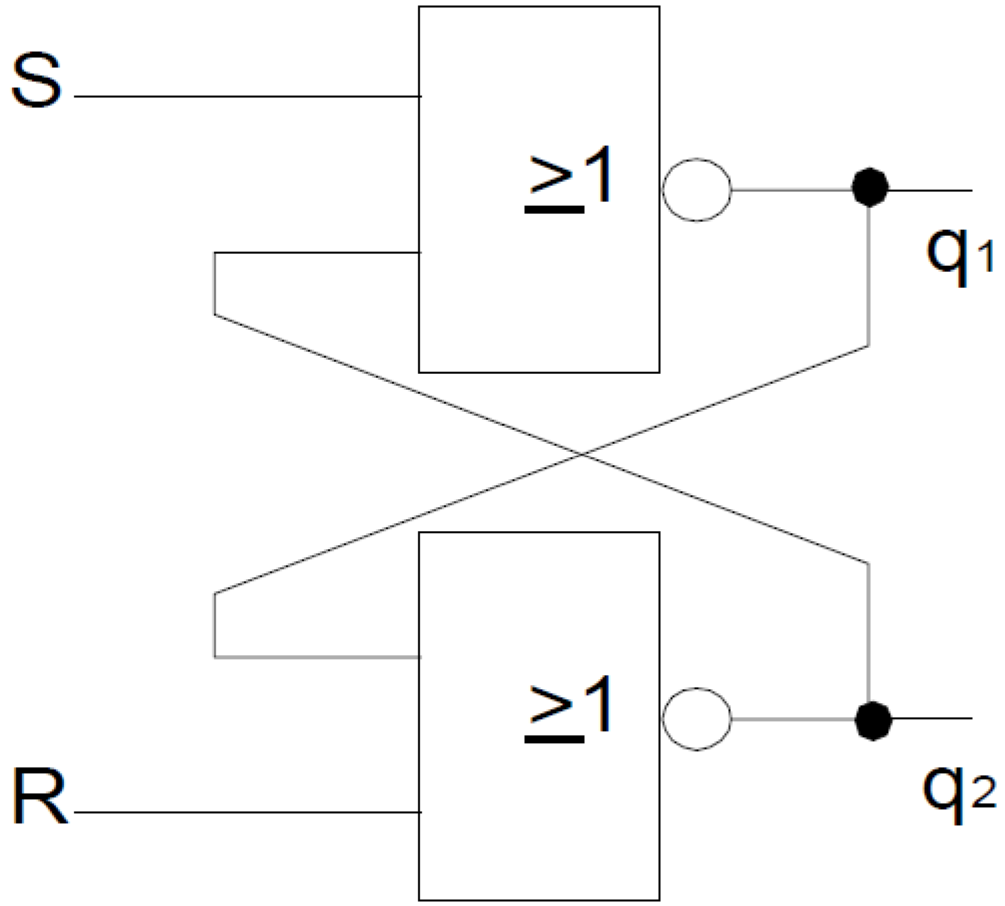
En la siguiente figura se representa el diagrama de bloques de un circuito Secuencial.



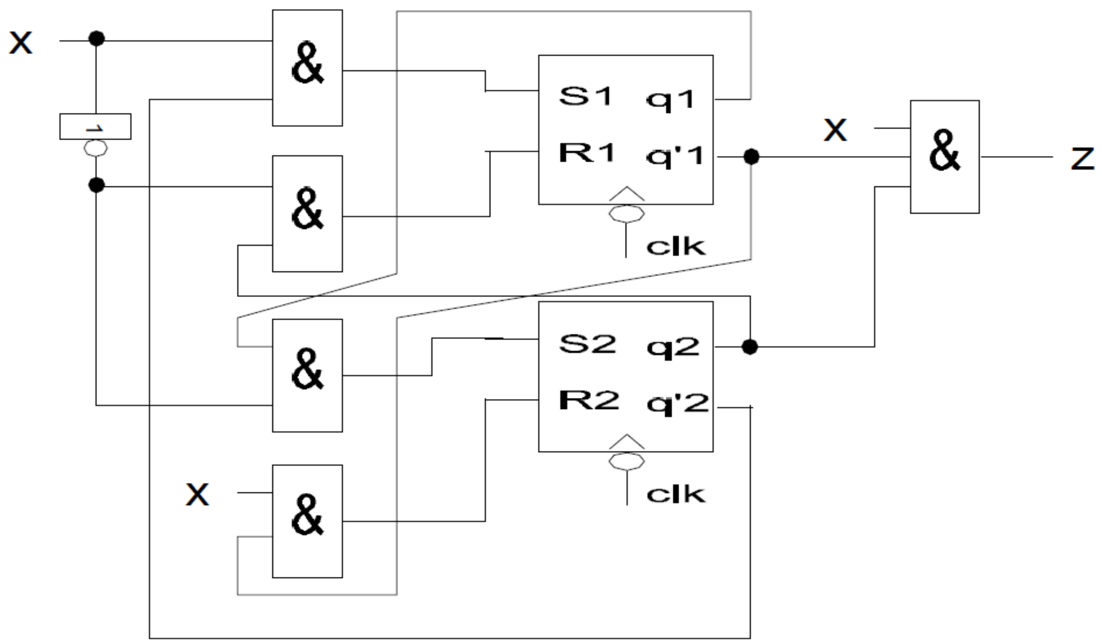
La siguiente figura muestra un ejemplo de elemento de memoria constituido por una puerta OR con una única realimentación de su salida hacia una de sus dos entradas.



Biestable SR realizado con puertas NOR
La siguiente figura muestra la estructura del biestable SR-NOR



Ejemplo 1
Analiza el circuito de la siguiente figura



Obtener ecuación de salida y de excitación, tabla de excitación y de salida, tabal de transición y de estados/salidas, diagrama de estados.

a) Ecuaciones de salida
Z = x q1’ q2

Ecuaciones de excitación
S1 = x q2’
R1 = x’ q2

S2 = x’ q1
R2 = x q1’
b) Tabla de excitación. Se representa en un K-mapa las ecuaciones de excitación anteriores, procurando colocar en vertical los q de los biestables, y en horizontal las entradas.

$q_1 q_2$ \ x	0		1	
00	00	00	10	01
01	01	00	00	01
11	01	10	00	00
10	00	10	10	00

$S_1R_1 \mid S_2R_2$

Tabla de salida. Se representa la ecuación de salida en un K-mapa siguiendo los criterios de la tabla de excitación

$q_1 q_2$ \ x	0	1
00	0	0
01	0	1
11	0	0
10	0	0

z

c) Tabla de transición.

$q_1 q_2$ \ x	0	1
00	00	10
01	01	00
11	01	11
10	11	10

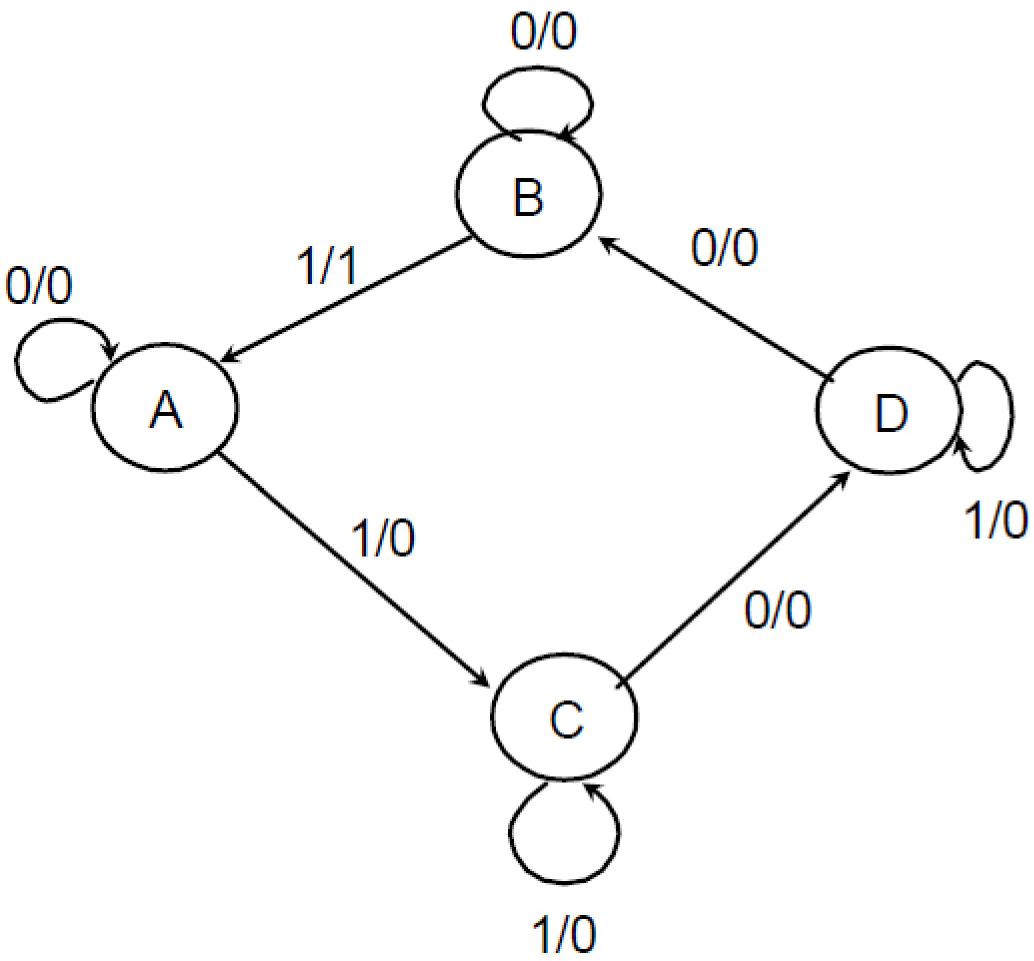
$Q_1 Q_2$

d) Tabla de estados/salidas.

S \ x	0	1
A	A,0	C,0
B	B,0	A,1
D	B,0	D,0
C	D,0	C,0

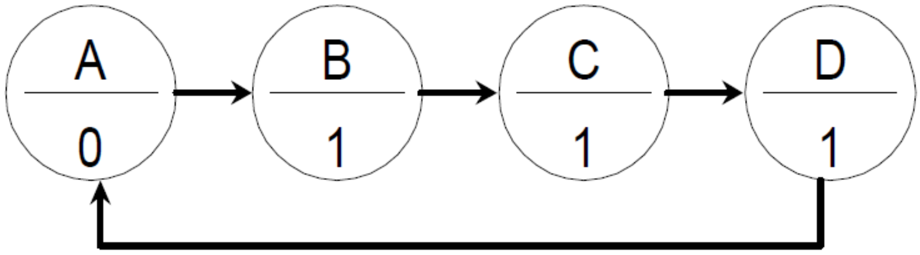
NS, z

e) Diagrama de estados. Este punto es opcional. Simplemente se translada la tabla de estados a una representación gráfica.



Ejemplo 2
Se pide diseñar un circuito secuencial síncrono que genere periódicamente la secuencia 0,1,1,1

PASO 1



PASO 2

S		
A	B	0
B	C	1
C	D	1
D	A	1

PASO 3

$q_1\ q_2$	$Q_1\ Q_2$	Z
00	01	0
01	10	1
11	00	1
10	11	1

PASO 4

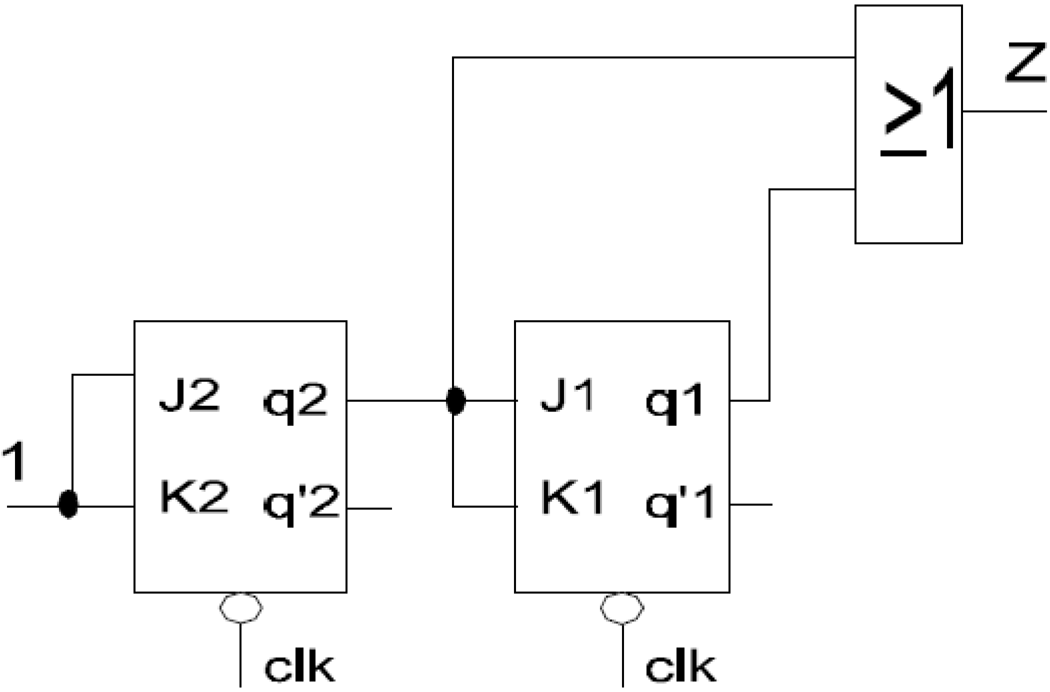
JK	q->Q
0x	0->0
1x	0->1
x1	1->0
x0	1->1

q_1 q_2	J_1 K_1	J_2 K_2	Z
00	0X	1X	0
01	1X	X1	1
11	X1	X1	1
10	X0	1X	1

PASO 5

Z= q1 + q2
J1 = q2
K1= q2
J2=1
K2=1

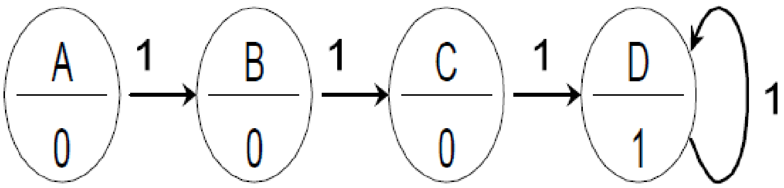
PASO 6

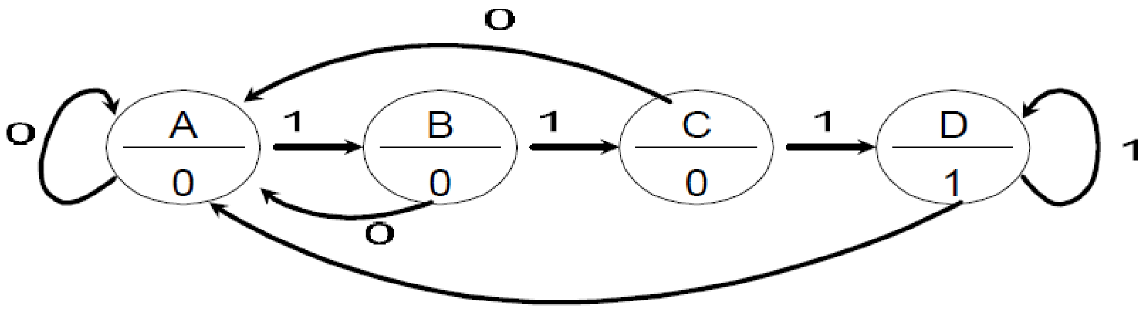


Ejemplo 2
Se desea diseñar un circuito secuencial síncrono que sea capaz de detectar la secuencia de entrada 1,1,1.

2.a) Como autómata de Moore.
Estado A: estado inicial donde se espera la recepción del primer 1 por la entrada X. Este estado “memoriza” que no se ha recibido ningún 1 y en él se genera salida Z=0
Estado B: estado que “memoriza” que se ha recibido un 1 y genera Z=0.
Estado C: Estado que “memoriza” que ya se han recibido dos 1’s consecutivos por la entrada X y en el que se genera salida 0.
Estado D: estado que “memoriza” que los tres últimos bits recibidos son 1. La

salida generada en este estado es 1.





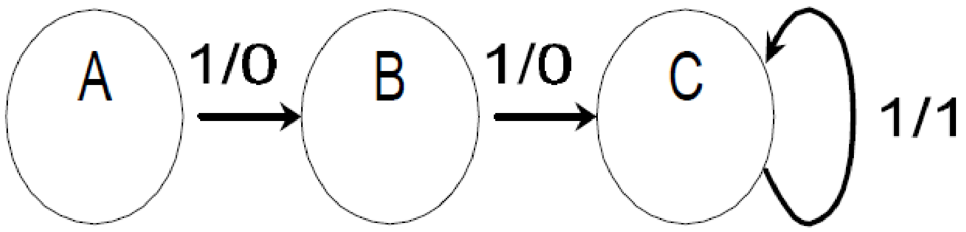
La tabla de estados/salida

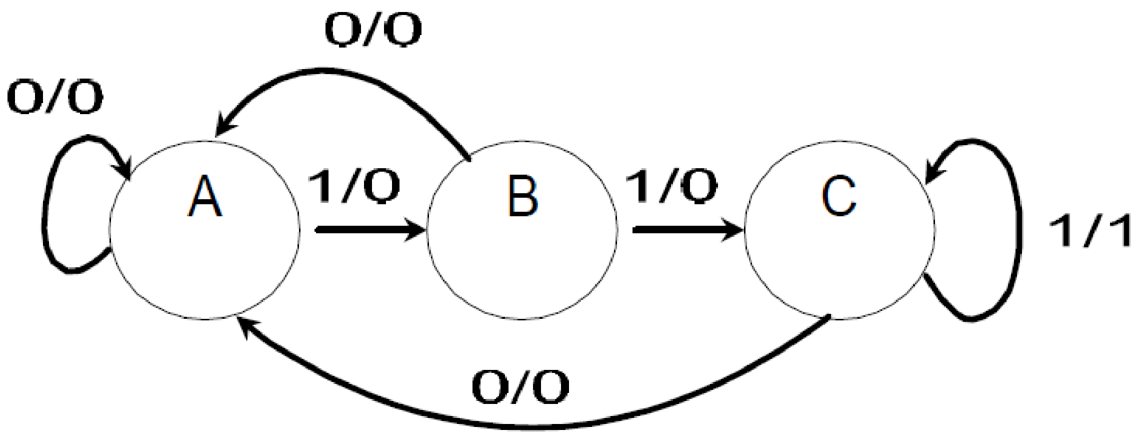
S \ X	0	1	
A	A	B	0
B	A	C	0
C	A	D	0
D	A	D	1
	NS		Z

q_1q_2 \ X	0	1	Z
00	00	01	0
01	00	10	0
11	00	11	1
10	00	11	0
	Q_1Q_2		Z

Y de la tabla de excitación/salida, las ecuaciones de excitación y de salida
Z= q1,q2’
J1= X q2
K1= X’
J2= X
K2= X’ + q1’

2 b) Como autómata de Mealy.
Tiempo (T)à
T: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ..
X: 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 ....
Estado : A A A B C D A A B C D D A ....
Z: 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0
Estado A: Estado inicial que “memoriza” que no se han recibido ningún 1.
Estado B: Estado al que se llega cuando se recibió un 1 en el ciclo de reloj anterior. Por tanto memoriza que se ha recibido un 1.
Estado C: Estado que “memoriza” que se han recibido dos o más unos consecutivos.





A partir de aquí se obtiene la tabla de estados/salida

S \ X	0	1
A	A	B
B	A	C
C	A	C,1

NS. Z

Si utilizamos biestables de tipo D, la tabla de excitación/salida quedaría:

q_1q_2 \ X	0	1
00	00	01
01	00	10
11	--	--
10	00	10,1

D_1D_2 ,Z

Y las ecuaciones de excitación y salida resultantes son:

Z= X q1 q2’

D1 = X q1 + X q2

D2 = X q1’ q2’

AGREDECEMOS SUS
SUGERENCIAS Y COMENTARIOS AL
EL ING. RODOLFO R. rromeroh@ipn.mx